Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

MATHEMATICS

A FUNCTIONAL EQUATION SATISFIED BY A LACUNARY FUNCTION

By L. B. ROBINSON

(Communicated by A. N. Krylov, Member of the Academy, 15. VII. 1936)

In this paper we are going to study the equation

$$u'(x) = a(x)\,u(x)^{\frac{m}{n}}, \tag{1}$$

where m and n are two positive integers relatively prime and $m > n$.

Furthermore $a(x)$ is an integral function with positive coefficients.

Make the substitution:

$$u(x) \equiv w(\operatorname{Log} x) \equiv w(z),$$

$$u'(x) \equiv w'(z)\frac{dz}{dx} \equiv w'(z)\frac{1}{x} \equiv w'(z)\cdot e^{-z}$$

for $x = e^z$;

$$u(x^{\frac{m}{n}}) \equiv w(\operatorname{Log} x^{\frac{m}{n}}) \equiv w\left(\frac{m}{n}\operatorname{Log} x\right) \equiv w\left(\frac{m}{n}z\right).$$

After this (1) takes the form:

$$w'(z) = e^z a(e^z)\, w\left(\frac{m}{n}z\right) \tag{2}$$

or

$$w'(z) = P(z)\, w\left(\frac{m}{n}z\right). \tag{3}$$

We easily see that the series which formally satisfies the above equation diverges in the neighbourhood of

$$z = 0, \quad x = 1.$$

So the above point is clearly a singular point for equation (1).

This theorem has no exceptions when the coefficients of $a(x)$ are positive. When this is not so, in general $w(z)$ is a divergent series, but exceptional cases exist.

We shall demonstrate that the above theorem entrains as consequence the existence of a series of singular points dense everywhere on a circle of radius one.

Therefore the circumference of the above circle is a «coupure» of $u(x)$.

Proof. Now let us prolong (1) by differentiation. We obtain the system *.

$$u'(x) = a_{11}(x)\,u(x^{\frac{m}{n}}),$$

$$u''(x) = a_{12}(x)\,u(x^{\frac{m}{n}}) + a_{22}(x)\,u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^2}),$$

. . . . . .

$$u^{\nu}(x) = a_{1\nu}(x)\,u(x^{\frac{m}{n}}) + a_{2\nu}(x)\,u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^2}) + \ldots + a_{\nu\nu}(x)\,u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}}).$$

After having solved the above system we obtain:

$$u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}}) = \frac{1}{\Delta}\left\{\Delta_{\nu 1}u'(x) + \Delta_{\nu 2}u''(x) + \ldots + \Delta_{\nu\nu}u^{\nu}(x)\right\}.$$

In general $\Delta \not\equiv 0$ when $(x) = 1$.

Now

$$u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}}) \quad \text{has a singular point at} \quad x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}} = 1,$$

because $u(x)$ has a singular point at $x = 1$.

The roots of that equation:

$$x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}} = 1,$$

are:

$$\rho_k = \cos\frac{2kn^{\nu}\pi}{m^{\nu}} + i\sin\frac{2kn^{\nu}\pi}{m^{\nu}}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, m^{\nu};$$

ρ_k is a singular point of $u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}})$.

Suppose that

$$x = \rho_k$$

is an ordinary point of the function $u(x)$.

Then

$$x = \rho_k$$

is an ordinary point of the function

$$f(x) \equiv \frac{1}{\Delta}\left\{\Delta_{\nu 1}u'(x) + \Delta_{\nu 2}u''(x) + \ldots + \Delta_{\nu\nu}u^{\nu}(x)\right\}.$$

But

$$f(x) = u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}}).$$

Therefore $x = \rho_k$ is an ordinary point of $u(x^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\nu}})$.

We have arrived at a contradiction.

Consequently, ρ_k is a singular point of $u(x)$.

The points ρ_k all rest upon the circumference of the circle of radius one.

When $\nu \to \infty$ the aggregate of points ρ_k upon the circumference becomes everywhere dense.

From this results that the circumference is a «coupure» of the function $u(x)$.

We must now study the equation:

$$u'(x) = a(x)\,u(x^{\frac{m}{n}}),$$

* $a_{11}(x) \equiv a(x)$, $a_{12}(x) \equiv a'(x)$, etc.

where

$$m < n.$$

We are able to study it in a more general form. For this purpose write:

$$u'(x) = \sum_1^n s a_s(x)\, u\left\{ x^{\tilde{\omega}_s(\mathrm{Log}\, x)} \right\} + b(x),$$

where

$$|\tilde{\omega}_s(\mathrm{Log}\, x)| < \rho,$$

provided that

$$|\mathrm{Log}\, x| \leqslant \rho$$

and where $a_s(x)$ and $b(x)$ are integral functions.

We shall make the transformation:

$$u(x) \equiv w(\mathrm{Log}\, x) \equiv w(z),$$

$$u\left\{ x^{\tilde{\omega}_s(\mathrm{Log}\, x)} \right\} \equiv w\left\{ \mathrm{Log}\, x^{\tilde{\omega}_s(\mathrm{Log}\, x)} \right\} \equiv$$

$$\equiv w\left\{ \tilde{\omega}_s(\mathrm{Log}\, x)\, \mathrm{Log}\, x \right\} \equiv w\left\{ \tilde{\omega}_s(z)\, z \right\},$$

$$u'(x) \equiv w'(z)\frac{dz}{dx} \equiv w'(z)\, e^{-z}.$$

Our equation becomes

$$w'(z)\, e^{-z} = \sum_1^n s a_s(e^z)\, w\left\{ \tilde{\omega}_s(z)\, z \right\} + b(e^z).$$

The above is an equation of Izumi, and can therefore be solved *.

When $\tilde{\omega}_s(\mathrm{Log}\, x)$ reduces to the fractional number $\frac{m_s}{n_s}$, where $|m_s| < |n_s|$, he solution is everywhere holomorphic.

An interesting case is furnished by the equation:

$$u'(x) = a(x)\, u\left(x^{[\mathrm{Log}\, x]\frac{m}{n}}\right).$$

It transforms into

$$w(z) = e^z a(e^z)\, w\left(z^{1+\frac{m}{n}}\right),$$

whose solution is lacunary provided m and n are positive.

Baltimore, U. S. A.

Received
15. VII. 1936

* Johoku, Mathem. Journ., 10 (1929).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

MATHÉMATIQUES

APPLICATION DU PROCÉDÉ DES MOMENTS À LA RÉSOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES AYANT DES SINGULARITÉS AUX COEFFICIENTS

Par M. KRAVČUK, membre de l' Académie des Sciences Ukranienne, et C. LATYŠEVA

Supposons que le premier membre de l'équation linéaire différentielle

$$L_x[y] = y^{(k)} + a_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

est présenté sous la forme:

$$L_x[y] = M_x[y] - (b-x)^s\, N_x[y] \tag{2}$$

où

$$M_x[y] = y^{(k)} + b_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + b_k(x) y, \tag{3}$$
$$N_x[y] = r_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + r_k(x)\, y,$$
$$b_i(x) = \frac{q_i(x)}{(b-x)^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

supposons de plus que la fonction $r_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ est de carré intégrable dans l'intervalle fermé $[a, b]$ et que la fonction $q_i(x)$ est $k + i + s$ fois dérivable dans l'intervalle $[a, b]$, le nombre entier s satisfaisant toutes les inégalités

$$s > R(\beta_i) - R(\beta_j) - 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k), \tag{4}$$

si l'on prend les nombres β_i comme racines de l'équation caractéristique du problème:

$$M_x[y] = 0. \tag{5}$$

La fonction de Green de l'équation

$$M_x[y] = F(x) \tag{6}$$

aux conditions limites

$$u_i[y] = \sum_{j=0}^{k-1} a_{ij}\, y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} [\beta_{ij}(x)\, y^{(j)}(x)]_{x=b} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, \overline{k-1}) \tag{7}$$

dans l'intervalle $[a, b]$ a la forme (1):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} h(x, \xi) + j(x, \xi) & (\xi \leqslant x), \\ j(x, \xi) & (\xi > x). \end{cases} \tag{8}$$

On a ici [2,3]:

$g(x, \xi) = (b - x)^{\beta_1}(b - \xi)^{m-\beta_1-1}\Phi_1(x, \xi) + \ldots + (b - x)^{\beta_k}(b - \xi)^{m-\beta_k-1}\Phi_k(x, \xi)$, les fonctions

$$\Phi_1(x, \xi),\ \Phi_2(x, \xi), \ldots, \Phi_k(x, \xi),$$

n'ayant aucunes singularités dans le carré

$$a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant \xi \leqslant b;$$

et la fonction $j(x, \xi)$ étant définie par l'équation:

$$[\{u(x)\} \cdot \{\rho(x)\}]_{x=b}\, j(x, \xi) = \begin{vmatrix} [\{u(x)\} \cdot \{\rho(x)\}]_{x=b} & \begin{matrix} h_0(b, \xi) \\ \vdots \\ h_{k-1}(b, \xi) \end{matrix} \\ y_1(x) \ \ldots \ y_k(x) & 0 \end{vmatrix}$$

si l'on introduit les notations suivantes:

$$\{u(x)\} \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0,k-1} & \beta_{00}(x) & \beta_{01}(x) & \ldots & \beta_{0,k-1}(x) \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,k-1} & \beta_{10}(x) & \beta_{11}(x) & \ldots & \beta_{1,k-1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{k}_{-1,0} & \alpha_{k-1,1} & \ldots & \alpha_{k-1,k-1} & \beta_{k-1,0}(x) & \beta_{k-1,1}(x) & \ldots & \beta_{k-1,k-1}(x) \end{pmatrix},$$

$$\{\rho(x)\} = \begin{pmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \ldots y_1^{(k-1)}(a) & y_1(x) \ldots y_1^{(k-1)}(x) \\ y_2(a) & y_2'(a) \ldots y_k^{(k-1)}(a) & y_2(x) \ldots y_2^{(k-1)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_k(a) & y_k'(a) \ldots y_k^{(k-1)}(a) & y_k(x) \ldots y_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix},$$

$$h_l(x, \xi) = -\sum_{i=0}^{k-l} \beta_{li}(x)\, \frac{\partial^i g(x, \xi)}{\partial x^i} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Les fonctions

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_k(x)$$

représentent ici le système fondamental des intégrales de l'équation (5).

Alors la solution du problème (6) — (7) sera

$$y = \int_a^b G(x, \xi)\, F_1(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

à la condition que la fonction [2,3]

$$F_1(\xi) = (b - \xi)^{k-m} F(\xi) \tag{10}$$

soit de carré intégrable, $\overline{m}$ etant le plus petit nombre entier qui satisfait à la condition:

$$m - \frac{1}{2} > R(\beta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

Les singularités de la fonction $G(x, \xi)$, considérée comme fonction de la variable ξ, en vertu de (4) et (11), sont tous de l'ordre $< \frac{1}{2}$; $G(x, \xi)$, considérée comme fonction de la variable x, n'a d'autres singularités que celles des solutions de l'équation (5).

En remplaçant l'équation (1) par une équation plus générale:

$$M_x[y] - \Lambda N_x[y] \cdot (b-x)^s = f(x)$$

on arrive au résultat suivant:

Pour toute valeur du paramètre Λ, l'exception faite au plus d'un ensemble des points discrets, le problème

$$M_x[y] = \Lambda (b-x)^s N_x[y] + f(x), \tag{12}$$

$$u_i[y] = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} [\beta_{ij}(x) y^{(j)}(x)]_{x=b} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{13}$$

a dans l'intervalle $a \leqslant x < b$ une solution unique, à la condition que la fonction

$$f_1(x) = (b-x)^{k-m} f(x)$$

soit de carré intégrable, $\bar{m}$ étant le plus petit nombre entier qui satisfait aux inégalités:

$$m - \frac{1}{2} > R(\beta_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

En effet le système (12) — (13) est équivalent au système des équations:

$$y^{(l)} = \Lambda \int_a^b \frac{\partial^l G(x, \xi)}{\partial x^l} (b-\xi)^{k+s-m} N_\xi[y]\, d\xi + \tag{14}$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial^l G(x, \xi)}{\partial x^l} f_1(\xi)\, d\xi \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1).$$

En combinant linéairement les égalités (14), on obtient pour la fonction $(b-x)^{k+s-m} N_x[y]$ l'équation intégrale suivante:

$$(b-x)^{k+s-m} N_x[y] = \Lambda \int_a^b (b-x)^{k+s-m} N_x[G(x, \xi)](b-\xi)^{k+s-m} N_\xi[y] d\xi + \tag{15}$$

$$+ \int_a^b (b-x)^{k+s-m} N_x[G(x, \xi)] f_1(\xi)\, d\xi.$$

Toutes les singularités du noyau $(b-x)^{k+s-m} N_x[G(x, \xi)]$ par rapport à chacune des variables x et ξ sont en vertu de (4) et (11), de l'ordre $< \frac{1}{2}$.

De l'équation (15) on obtient

$$(b-x)^{k+s-m} N_x[y] = \int_a^b \Gamma_1(x, \xi; \Lambda) f_1(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

la fonction $\Gamma_1(x, \varepsilon; \Lambda)$ étant le noyau résolvant.

En substituant (16) en (14) nous recevons définitivement:

$$y^{(l)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^l \Gamma(x, \xi; \Lambda)}{\partial x^l} f_1(\xi)\, d\xi \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

où

$$\Gamma(x, \xi; \Lambda) = \Lambda \int_a^b G(x, \eta)\Gamma_1(\eta, \xi; \Lambda)\, d\eta + G(x, \xi).$$

En appliquant le procédé des moments on trouve la solution approchée du problème (12) — (13) sous la forme:

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i(x),$$

la fonction $\varphi_i(x)$ étant la solution de l'équation

$$M_x[\varphi_i] = (b - x)^{m-k} \Phi_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

où les fonctions

$$\Phi_0(x), \ \Phi_1(x), \ \Phi_2(x), \ldots$$

forment un système fermé dans un intervalle $[a, b]$.

On définit les coefficients $a_i^{(n)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ par les équations (2):

$$\int_a^b (b - x)^{k-m} L_x[y]\, \Phi_j(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, \Phi_j(x)\, dx \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

En vertu de l'existence des intégrales

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial^l G(x, \xi)}{\partial x^l} \right\}^2 d\xi, \quad \int_a^b \left\{ (b - (x)^{k+s-m} N_x[G(x, \xi)] \right\}^2 dx,$$

$$\int_a^b \int_a^b \left\{ (b - x)^{k+s-m} N_x[G(x, \xi)] \right\}^2 dx\, d\xi,$$

on peut répéter les raisonnements du livre cité (1) (ou l'auteur se borne au cas de l'absence des singularités), nous recevons la convergence de la solution approchée $y_n(x)$ du problème (12) — (13) et de ses derivées jusqu'à l'ordre $k - 1$, inclusivement:

$$\lim_{n \to \infty} y_n^{(l)}(x) = y^{(l)} \qquad (l = 0, 1, \ldots, k - 1).$$

On parvient aux résultats analogues en admettant que les solutions de l'équation $L_x[y] = 0$ aient des singularités (régulières) à toutes les deux extrémités de l'intervalle $[a, b]$.

Institut Mathématique.
Académie des Sciences Ukranienne.
Kiev.

Manuscrit reçu
le 1. VII. 1936

LITTÉRATURE CITÉE

[1] М. Кравчук, Застосування способу момента до розвъязаниь лінійних диференціальних та інтегральних рівняны. Выпуски 1, 2, Київ (1932), (1936).
[2] М. Кравчук і К. Латишева, Журнал Інституту Математики АН УССР. Киев 1, № 4, 1936. [3] К. Латишева, Журнал Інституту Математики АН УССР. № 2, Киев (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936, Volume III (XII), № 6 (101)

MATHEMATIQUES

SUR L'ÉQUATION COMPLEXE DE FREDHOLM

Par S. JANČEVSKIJ (JANCZEWSKI)

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 10. VII. 1936)

I.

L'équation de Fredholm au noyau méromorphe

Soient données les équations intégrales dont le premier membre est $y(z)$ ou $y(z) - f(z)$ et le second membre une des intégrales:

$$\lambda \int_C K(z, t)\, y(t)\, dt, \quad \text{(I)} \qquad \lambda \int_C K(z, t)\, y(t)\, d\sigma, \quad \text{(II)}$$

$$\lambda \int_C K(z, \bar{t})\, y(t)\, d\sigma, \quad \text{(III)} \qquad \lambda \int_C K(z, \bar{t})\, \overline{y(t)}\, d\sigma, \quad \text{(IV)}$$

où C est une courbe fixée rectifiable, le long de laquelle varie t; $d\sigma$ l'élément de l'arc; $\bar{t}$ est conjugué à t; f et K sont des fonctions données. Soient $f(z)$ et $K(z, t) = G(z, t)/H(z, t)$ [respectivement $K(z, \bar{t}) = G(z, \bar{t})/H(z, \bar{t})$] des fonctions analytiques uniformes de z, t [z, $\bar{t}$], ne possédant que des singularités polaires quand z varie dans un domaine D contenant C, et t sur C et dans le voisinage de C. Alors les singularités de $y(z)$ sont: pôles $z = b_1, \ldots$ de $f(z)$, pôles fixes $z = e_1, \ldots$ de K; lignes $E_1, \ldots$ provenant des pôles mobiles de K, telles qu'on ait $H(z, t) = 0$ [$H(z, \bar{t}) = 0$], $t \in C$, z est un point correspondant de E. Nous supposons toutes ces singularités situées en dehors de C. Alors $y(z)$ défini en premier lieu sur C (par la voie habituelle) est régulier analytique dans D, sauf des b, e, E. Pour l'étude des propriétés analytiques de $y(z)$ on doit considérer dans les intégrales (I)—(IV) $y(t)$ comme une fonction déjà connue. La théorie ultérieure des équations de Fredholm complexes est ainsi équivalente [à $f(z)$ près] à la théorie des intégrales (I)—(IV), où la fonction sous le signe de l'intégrale est donnée d'avance et z varie sur C ou en dehors de C. Dans la note précédente [1] nous avons étudié les propriétés de $y(z)$ dans le voisinage des b, e, E, ainsi que le problème de prolongement analytique au delà des coupures E. On décomposait dans le voisinage d'un arc de E l'intégrale de l'équation en une somme dont un des membres était l'intégrale du type Cauchy $\int \frac{dz}{\tau - \xi}$, et de celle-là dépendaient

les propriétés en question (voir loc. cit.) Maintenant il s'agit de donner dans le cas où G, H, f sont des fonctions entières de $z\,(t\in C)$ une représentation générale de $y\,(z)$ contenant dans une forme explicite les membres donnés par toutes les singularités de cette fonction. Les formules suivantes seront données pour le cas (II), mais il est facile de les transformer mutatis mutandis pour les autres cas. Nous supposons dans la suite que la courbe C est composée d'un nombre fini des arcs aux tangentes continues et que les courbes E n'ont pas de points multiples et de points communs entre eux, ainsi que $z = R_i\,(t)\,(t\in C)$ étant l'équation de la courbe E_i, l'on a $R_i\,(t_1)\neq R_i\,(t_2)$, $R_i\,(t_3)\neq R_j\,(t_4)\,(t_1\neq t_2)$. On a alors la formule

$$K\,(z,\,t) = \frac{G\,(z,\,t)}{[z-R_i\,(t)]^{n_i} H_1\,(z,\,t)} \quad (t\in C) \tag{1}$$

avec $H_1\,(z,\,t)\neq 0$ quels que soient $(z,\,t)\in C$. Il est facile de transformer l'égalité (1) dans la suivante:

$$K\,(z,\,t) = \frac{B_{n_i}^{(i)}\,(t)}{[z-R_i\,(t)]^{n_i}} + \ldots + \frac{B_1^{(i)}\,(t)}{z-R_i\,(t)} + K_i^*\,(z,\,t) \quad (t\in C)^*. \tag{2}$$

C'est la décomposition de $K\,(z,\,t)$ en fractions simples tenant compte de la condition $t\in C$. Ici K^* est une fonction continue de $t\in C$ et régulière de z dans le voisinage de E_i, cette courbe inclus; $B_k^{(i)}\,(t)$ sont des fonctions continues. On a alors pour les valeurs de z dans les environs de E_i:

$$\lambda \int_C K\,(z,\,t)\,y\,(t)\,d\sigma = G_i\,(E_i,\,z) + \lambda \int_C K_i^*\,(z,\,t)\,y\,(t)\,d\sigma, \tag{3}$$

si l'on pose

$$G_i\,(E_i,\,z) = \lambda \sum_{j=1}^{n_i} \int_C \frac{B_j^{(i)}\,(t)\,y\,(t)\,d\sigma}{[z-R_i\,(t)]^j}. \tag{4}$$

Prenons maintenant une suite des nombres positifs $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ avec la somme $\sum \varepsilon_k = \varepsilon$ convergente. Désignons par R_i la plus petite distance de E_i à l'origine. On peut alors, pour $|z| < R_i$, développer:

$$G_i\,(E_i,\,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\nu}\,z^\nu, \tag{5}$$

et il existe un nombre ν_i tel que l'on a:

$$|G_i\,(E_i,\,z) - P_i\,(z)| < \varepsilon_i;\; P_i\,(z) = \alpha_{i0} + \ldots + \alpha_{i\nu_i} z^{\nu_i} \tag{6}$$

pour $|z| \leqslant \alpha R_i$ (α étant un nombre fixe < 1). On démontre aisément alors que la série

$$F\,(z) = \sum_{i=1}^{\infty} [G_i\,(E_i,\,z) - P_i\,(z)] \tag{7}$$

est uniformément convergente—après l'exclusion d'un nombre convenable de ses premiers membres—dans tout cercle de rayon $< \infty$ arbitraire-

---

* Un cas particulier des formules de cette sorte pour les fonctions de deux variables était utilisée par M. Goursat (2).

ment pris. Nous avons, par conséquent, la formule cherchée (dans le csa où il n'y a pas des singularités fixes de K):

$$y(z) = f(z) + \sum_{i=1}^{\infty} [G_i(E_i, z) - P_i(z)] + g(z) \qquad (8)$$

$g(z)$ étant une fonction entière de z. Cette formule contient dans une forme explicite tous les membres singuliers dans $y(z)$. Les lignes E_i sont pour $y(z)$ ce qu'on appelle «coupures polaires». La série (8) est parallèle au développement selon Mittag-Leffler d'une fonction méromorphe de z. Des formules analogues ont été obtenues par M. Golubeff [3] pour des fonctions contenant des membres intégrales du type semblable à G_i, mais donnés d'avance.

S'il n'y a qu'un nombre fini des courbes E et des pôles fixes e et outre cela on a $K(\infty, t \in C) = 0$, alors au lieu de (8) nous aurons une formule bien simple:

$$y(z) = f(z) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{[z - e_i]^j} \int_C C_j^{(i)}(t)\, y(t)\, d\sigma + \lambda \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \int_C \frac{B_j^{(i)}(t)\, y(t)\, d\sigma}{[z - R_i(t)]^j}. \qquad (9)$$

On peut sous certaines conditions supplémentaires sur K obtenir encore un développement de $y(z)$ cette fois analogue au développement des fonctions méromorphes selon Cauchy:

$$y(z) = f(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[G_i(E_i, z) - G_i(E_i, 0) - \ldots - \frac{z^p}{P!} G_i^{(p)}(E_i, 0) \right]. \qquad (10)$$

Toutes ces questions ainsi que les théorèmes de la note [1] seront étudiées en détails (par exemple, concernant le cas des points multiples des E_i etc.) dans un mémoire plus étendu.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Janczewski. C. R., 200, 33 (1935). [2] Goursat, Acta Math., 5, 102 (1884). [3] Голубев, Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особенных точек. Диссертация, Москва (1916).

II

L'équation de Fredholm au noyau multiforme

1. Nous allons poursuivre ici l'analyse des équations intégrales représentées á la page 225.

Nos raisonnements seront effectués pour le cas (II), mais ils pourront nous servir aussi bien dans les trois autres cas. Nous avons supposé précédemment que le noyau est uniforme; à présent, soit abordé le cas de noyau multiforme. Soit désormais $K(z, t)$ une solution de l'équation $F(K, z, t) = 0$, F étant une fonction régulière dans un domaine suffisamment large pour nos études. Alors K, comme il est bien connu, est détérminé de plus par une équation pseudoalgébrique $A(K, z, t) = 0$, (A) et les ensembles de ramification de K sont donnés par une équation de même pseudoalgébrique $\Delta(z, t) = 0$ (Δ) provenant du discriminant de F. Nous supposons d'abord que K est fini et la courbe C est formée d'un nombre fini des arcs aux tangentes continues. Elle est située outre cela d'une telle manière, que, z variant dans un domaine complexe D et t dans les environs de C, tous les calculs précédents sont toujours valables. Soit enfin $\Delta(z, t) \neq 0$, $z, t \in C$. Alors la fonction multiforme $K(z, t)$ a un nombre quelconque m de branches pour $t \in C$, z dans les en-

virons de C, et ce sont des fonctions régulières dans les environs de chaque point z, t de cette sorte.

2. Nous avons maintenant pour $z, t \in C$ m équations intégrales dont on peut construire les solutions respectivement pour $z \in C$. En tout cas $y(t)$ dans l'intégrale (II) sera désormais une fonction connue. La théorie de l'équation de Fredholm sera ainsi équivalente (à $f(z)$ près) à la théorie de l'intégrale (II) étudiée comme fonction de z avec K et y connus d'avance. Pour obtenir les propriétés ultérieures d'une branche fixée de $y(z)$, on devrait recourir à l'étude de l'espace R_4 à 4 dimensions: $z = x + iy$, $t = \sigma + i\tau$. Mais comme on a $t \in C$, les fonctions $K(z, t)$ et $\Delta(z, t)$ doivent être étudiées seulement dans un espace $R_3^* (\subset R_4)$ à 3 dimensions, correspondant à notre choix de t. L'équation (Δ) détermine dans R_3^* un faisceau des arcs de courbes $\sum_1, \ldots$ dont les projections sur le plan $z : S_1, \ldots$ peuvent être nommés «lignes de ramification» pour $y(z)$. Ces courbes n'ont pas de points communs avec C *.

$K(z, t)$ doit être étudié dans R_3^* comme fonction de z et de t variant sur toute la courbe C pour chaque z pris par nous. Ainsi au point de vue géométrique l'argument de K dans R_3^*, que nous désignerons par $(z, \{t\})$, sera une courbe Γ_z^* égale à C, dont l'image au plan des z est la valeur de z prise. Si z décrit une courbe fermée L, alors Γ_z^* décrit un cylindre Λ dans R_3^* et il résulte des propriétés de R_3^* que les trois cas suivants seules peuvent se présenter: L_a) Λ laisse tous les $\sum$ en dehors de soi; L_b) Λ contient quelques $\sum$ à son intérieur; Λ_c) il y a des points d'intersection de Λ avec des $\sum$.

3. Pour tous les chemins L_a $y(z)$ reste une fonction uniforme. Au contraire, le noyau K et la solution y ne peuvent reprendre leurs valeurs initiales après avoir passé le chemin L_b. Pour expliquer ces faits nous allons transformer R_3^* dans un espace de Riemann R_3°; pour $K(z, \{t\})$ basé sur les lignes $\sum$ et dont les surfaces suivant lesquelles sont liés les «feuillets» de R_3° ont pour projections sur le plan z les courbes S_i et certaines lignes passant des extrémités des S_i vers l'infini. $K(z, \{t\})$ sera une fonction uniforme dans R_3° et $y(z)$ sera uniforme sur une surface de Riemann D_y qui est une «projection» de R_3° sur le plan z dans le sens que la connexion, le nombre des feuillets et leur ordre etc. sont pour D_y les mêmes que pour R_3°. Le rôle des points de ramification vient ici aux lignes S_i (que nous n'avons pas encore traversées).

4. Nous abordons maintenant le cas L_c. Si Λ a des points d'intersection avec $\sum$, alors la courbe L_c sur le plan z traverse quelque courbe singulière S_i. Soit choisie une branche initiale de K et y pour $z = z_0$ et $t \in C$. Alors il est facile de voir qu'après avoir décrit L_c, traversant S_i, nous obtenons pour $z = z_0$ et $t \in C_1$ (C_1 la partie de C correspondant à l'arc de S_i intérieur à L_c) des valeurs de K appartenant déjà à une nouvelle branche, et sur $C - C_1$ les valeurs initiales. Ainsi l'intégrale (II)—considérée pendant tout le chemin L_c comme une limite des sommes correspondantes de Riemann—et $y(z)$, n'ont plus la même valeur à la fin et au commencement de L_c. Mais on peut prendre un con-

---

* L'introduction de l'espace R_3^* est indispensable, parce que l'intersection des S_i sur le plan z n'est pas toujours l'image d'une intersection des courbes Σ_i dans l'espace.

tinuum des L_c avec le point de départ z_0. Par conséquent, $y(z)$ aura un continuum de valeurs dans un même point z_0 s'il est permis de traverser les lignes S. Si $K(z, t)$ reste fini, alors en traversant une courbe S nous avons ici un prolongement continu mais point analytique de $y(z)$ au delà de S. Le prolongement analytique sera effectué en calculant l'intégrale définie (II) par l'intégrale indéfinie prise pour z en dehors de S, après quoi seulement z pourra traverser S. Les points anguleux de S seront alors les seuls points singuliers—points de ramification—de la fonction prolongée. On peut aussi rendre uniforme notre fonction continuum-multiforme en construisant une surface de Riemann généralisée pour ce cas. Le simple exemple de l'intégrale $J(z)=\int_1^z \sqrt{z-3t}\, dt$ suffit pour expliquer ce procédé.

Soit qu'il est permis de traverser la ligne singulière $S \equiv (3, 6)$ en les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Construisons alors 2^{n-1} surfaces de Riemann à deux feuillets du type D_y dont chacune correspond à un choix arbitrairement fixé des deux branches de radical dans les intervalles $(3, \alpha_1)$, $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots$ pour $z = z_0$—et au choix supplémentaire—,les points de S étant chaque fois communs pour les deux feuillets. Ce choix des branches de radical ayant fait, $J(z)$ sera une fonction uniforme de z sur cette surface, sous condition qu'il soit défendu de toucher à S. Mais si l'intersection de S en les point α_1,... est permise, alors, pour que l'uniformité de y soit conservée, on doit se transmettre après l'intersection avec S en α_k sur une nouvelle surface par un «tube» passant du point α_k de la surface initiale au même point de la surface nouvelle. Cette dernière est facilement reconnaissable si l'on indique le point d'intersection et les valeurs de radical obtenues en entourant après l'intersection les deux bouts de S. De même pourra-t-on procéder dans le cas général: le «numéro» de la surface initiale, c'est-à-dire, l'ordre des branches de K sur les parties différentes de C (pour $z = z_0$), et la connaissance du point d'intersection donneront toujours d'une manière unique le «numéro» de la surface où l'on se trouvera.

On peut obtenir une classification générale et détaillée de ces surfaces, les théorèmes concernant des cas d'intersection des S entre eux et de K devenant infini, et étudier de même de plus près le cas de courbe C fermée ou les propriétés des noyaux logarithmiques (ceux-ci sont analogues aux propriétés ci-dessus). Tout cela sera donné dans un mémoire plus étendu sur ce même sujet.

Institut Mathématique
de l'Université de Léningrad.

Manuscrit reçu
le 10. VII. 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

ASTRONOMY

ON COMPILING A FUNDAMENTAL CATALOGUE OF FAINT STARS

By B. V. NUMEROV, Corresponding Member of the Academy

The determination of right ascensions is usually subdivided into two distinct stages of work. The first stage is the construction of a system of right ascensions correct within itself, *i. e.* the determination of the difference in the right ascensions of two neighbouring stars. The second stage is the orientation of the system, *i. e.* the determination of the absolute right ascension if only for one star and the study of the systematic rerors of the fundamental catalogue.

In our previous papers we have pointed out that it would be advisable to use, in the orientation of the system the observations and the theory of motion of minor planets. Up till now it is the Sun that has been observed with this end in view.

Our theoretical investigations have shown that, if observations of minor planets were used to correct the errors of the equinox as well as the systematic errors of the system, the degree of precision achieved would be far greater than that obtainable with the Sun. Moreover, the minor planets make it possible to determine some of the coefficients which characterize the system of the catalogue, a problem not to be solved with solar observations.

The question of the use of minor planets in compiling a fundamental catalogue of stars brings to the fore a revision of the methods of absolute observations. The observation of minor planets with meridian instruments involves considerable difficulties. In the majority of cases, minor planets are faint objects, and the meridian instruments so far available do not admit of systematic observations of any one planet over a prolonged period of time near the opposition.

The necessity therefore suggests itself of constructing a powerful meridian circle for the observations of minor planets and faint stars.

In determining the orientation of a fundamental system with the help of solar observations, it was, of course, necessary to make observations of bright stars in the day time. Thus, the main fundamental catalogue of Pulkovo Observatory comprises in the first place the brightest stars of the first and second magnitude, and, partly, fainter stars down to the 6th magnitude. Owing to a marked gradation in the brightness of the stars comprised in the fundamental catalogue, there arose some systematic errors in the observation of right ascensions, errors usually referred to as «the equation of brightness».

If the orientation of the system is determined by minor planets, there is no need whatever of diurnal observations, and, consequently, only faint stars could be comprised in the fundamental catalogue. Inversely, it is easier to connect the observations of minor planets with a fundamental catalogue system of faint stars than with a system of bright stars. This would partly do away with the source of observational errors inseparable from the observations of bright stars. On the other hand, the compilation of a fundamental catalogue of faint stars is also rendered necessary by considerations of stellar statistics.

We are thus justified in formulating the following main principles.

1. It is imperative to construct a fundamental system of faint stars, using in the orientation of the system the observations and the theory of a selected group of minor planets.

2. Accurate observations of the minor planets comprised in the system of the fundamental catalogue will enable us, not only properly to orientate the system and to study the systematic errors of the system, but also to evolve in future an exact theory of planetary motions, a theory of the motion of the Earth, and to determine the masses of the major planets.

It is necessary, with this end in view to proceed to a systematic observation of the minor planets so selected for several oppositions and for a period of at least six months in the neighbourhood of every opposition.

3. In order to construct a system of right ascensions of the fundamental catalogue it is imperative to select three rings of faint stars: one in the polar region, one near the zenith and one near the equator. In observing the zenith ring conjointly with the polar stars in their lower and upper culmination, we shall evolve a method of the absolute determination of azimuths from faint stars. This method has some advantages over the classical procedure of observing the Polar Star in its lower and upper culmination.

4. With a view to observing faint minor planets and faint stars, a powerful meridium circle ought to be constructed, so as to make it possible to observe stars of the 11th magnitude. Most interesting in this connection is the idea of a photographic meridian circle with the use of meridian marks established in the first veritical.

5. At the present stage of our knowledge, the observations of faint minor planets ought to be done photographically. In this connection a considerable interest is afforded by the observation of selected minor planets organized by the American observatories under the guidance of Prof. Schlesinger towards the end of 1935. The object of these observations is to study the systematic errors of Boss's catalogue.

The plates obtained might be utilized in measuring the positions of minor planets in the system of the new fundamental catalogue of faint stars.

6. The fundamental catalogue of faint stars should comprise four main parts, viz:

a) A fundamental catalogue of 250 stars (the polar, the zenith and the equatorial ring).

b) A catalogue of 1500 control stars for the meridian circles.

c) A catalogue of contol stars in the equatorial zone for determining the positions of minor planets on the basis of photographic records obtained by the American observatories.

d) Finally, a catalogue of faint stars selected in accordance with stellar statistics with a view to the best possible determination of the proper motion of the stars, of the precession constant and of the best possible connection with the Galactic System.

A similar catalogue should also be compiled for the Southern hemisphere.

7. Before compiling the fundamental catalogue, it is imperative to bring to a close the theoretical and the methodical investigations in connection with the use of minor planets for purposes of orientation, to test the method of determining absolute azimuths from the ring of polar stars etc., and to proceed to a reconstruction of the existing meridian circles*.

First of all, a photographic recording of the readings of the circle ought to be introduced. The photographic method of recording makes it possible to use 20′ divisions of the circle, *i. e.* to determine the individual errors of every division. In the circles of nowadays graduated to 2′ of the arc, only the systematic errors of the graduation of the circle are usually investigated.

Astronomical Institute.
Leningrad.

Received
23. V. 1936.

REFERENCES

[1] Б. В. Нумеров, Бюлл. Астр. ин-та, № 32 (1933). [2] Dirk Brouwer, Astr. Journ., № 1022 (1935). [3] B. V. Numerov, J. Obs., XVIII, 4 (1935). [4] W. J. Eckert, Astr. Journ., № 1034 (1935). [5] B. V. Numerov, J. Obs., XVIII, 9—10 (1935), Астр. журн., XII, 5 (1935). [6] Б. В. Нумеров и В. С. Мошкова, Астр. журн., XIII, № 1 (1936). [7] Б. В. Нумеров, Астр. Журн. (1935), Astr. Journ. (1936). [8] B. V. Numerov, C. R. Acad. Sci. URSS, III, № 5 (1935); Астр. журн. XII, 4 (1935).

[1] This refers, in the first place, to the meridian circles of USSR Observatories.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

GEOPHYSIK

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER FIGUR DES GEOIDS AUS SCHWEREMESSUNGEN

Von B. V. NUMEROV, korrespondierendem Mitglied der Akademie, und D. CHRAMOV

Wenn wir uns die Aufgabe stellen, die Figur des Geoids aus den auf der Oberfläche desselben angegebenen Werten der Schwerkraft zu bestimmen, so können wir diese Aufgabe am besten lösen, indem wir die Schwerkraft g und den Radius-Vektor des Geoids R in Reihen nach den Funktionen der Breite und Länge entwickeln.

Bei Betrachtungen, die sich auf die soeben angegebene Methode beziehen, ist es üblich mit linearen Beziehungen von der Art $g_n = (n-1)\, r_n$ zu operieren, wo g_n und r_n Koeffizienten vor den Kugelfunktionen n-ter Ordnung bzw. in den Entwicklungen der Schwerkraft und des Radius-Vektors des Geoids sind. Namentlich hat Ackerl (1), indem er die erwähnten linearen Beziehungen anwandte, zur Ableitung der Figur des Geoids die von ihm asugeführte Entwicklung von g nach den Kugelfunktionen bis zu 16. Ordnung inklusiv verwertet.

Wie bekannt (2), ist jedoch die Anwendung obenerwähnter Beziehungen gleichbedeutend mit dem Ersatz von g, d. h. der Normalableitung des Potentials der Schwerkraft, durch die Ableitung des Potentials nach dem Radius-Vektor. Bekannt ist auch ferner, dass eine solche Anwendung Fehler von der Ordnung des Quadrats der Abplattung nach sich zieht.

In der vorliegenden Abhandlung leiten wir Entwicklungen des Radius-Vektors des Geoids und der Schwerkraft ab, unter Berücksichtigung der Grössen von der Ordnung des Quadrats der Abplattung*.

Das Potential der Schwerkraft V in einem Punkte, dessen Polarkoordinaten in bezug auf den Schwerpunkt der Erde gleich R, φ und λ sind, kann durch folgende Entwicklung dargestellt werden

$$V = \frac{k^2 M}{R_0}\left[p + A_2 p^3 + A_3 p^4 + A_4 p^5 + B_2 p^{-2}\right], \tag{1}$$

worin

$$p = \frac{R_0}{R};\ B_2 = \sigma \cos^2\varphi;\ \sigma = \frac{\omega^2 R_0}{2 g_0};\ g_0 = \frac{k^2 M}{R_0^2}.$$

k^2 ist die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde, ω die Winkelgeschwindigkeit ihrer Rotation, R_0 eine konstante Grösse, die sich von dem mittleren Radius der Erde wenig unterscheidet.

* Eine ausführliche Wiedergabe dieser Arbeit wird demnächst andererwärts erscheinen.

Ferner ist

$$A_n = \sum_{k=0}^{k=n} P_n^k (c_{nk} \cos k\lambda + d_{nk} \sin k\lambda), \qquad (2)$$

worin

$$\begin{aligned}
&c_{20} = 2A_{002} - A_{200} - A_{120},\\
&c_{21} = 2A_{101};\ d_{21} = 2A_{011},\\
&c_{22} = \tfrac{1}{2}(A_{200} - A_{020});\ d_{22} = A_{110},\\
&c_{30} = 4A_{003} - 6A_{201} - 6A_{021},\\
&c_{31} = 2A_{102} - A_{300} - A_{120};\ d_{31} = 2A_{012} - A_{030} - A_{210},\\
&c_{32} = 2(A_{201} - A_{021});\ d_{32} = 4A_{111},\\
&c_{33} = \tfrac{1}{6} A_{300} - \tfrac{1}{2} A_{210};\ d_{33} = \tfrac{1}{2} A_{210} - \tfrac{1}{6} A_{030},\\
&c_{40} = 3A_{400} + 3A_{040} + 8A_{004} + 6A_{220} - 24A_{202} - 24A_{022},\\
&c_{41} = 8A_{103} - 6A_{301} - 6A_{121};\ d_{41} = 8A_{013} - 6A_{211} - 6A_{031},\\
&c_{42} = 2(A_{202} - A_{022}) - \tfrac{1}{3}(A_{400} - A_{040});\ d_{42} = 4A_{112} - \tfrac{2}{3}(A_{310} + A_{130}),\\
&c_{43} = \tfrac{1}{3} A_{301} - A_{121};\quad d_{43} = A_{211} - \tfrac{1}{3} A_{031},\\
&c_{44} = \tfrac{1}{24}(A_{400} + A_{040}) - \tfrac{1}{4} A_{220};\ d_{44} = \tfrac{1}{6}(A_{310} - A_{130})
\end{aligned} \qquad (3)$$

und

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{MR_0^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot 2^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \int x^\alpha y^\beta z^\gamma \, dm. \qquad (4)$$

Die Integration in (4) erstreckt sich über das ganze Volumen der Erde.

In der Formel (2) ist $P_n^0 = P_n(\sin\varphi)$ das Legendre'sche Polynom n-ter Ordnung von dem Argument sin φ und P_n^k die ihm angegliederte Funktion:

$$P_n^k = \frac{d^k P_n(\sin\varphi)}{d \sin\varphi^k} \cos^k \varphi.$$

Nimmt man an, dass die Erde die Form eines Rotationsellipsoids mit der Excentrizität des Meridians e und der Abplattung $\alpha \approx \frac{1}{2} e^2$ hat, so ist es leicht zu ersehen, dass A_2 und B_2 Grössen von der Ordnung α sind, A_4 eine Grösse von der Ordnung α^2 darstellt und A_3 zu einer Null wird.

Nehmen wir an, dass e eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so sind wir berechtigt A_2 (ebenso wie B_2), A_3 und A_4 als Grössen mindestens zweiter, dritter und vierter Ordnung zu betrachten.

Schreiben wir die Gleichung des Geoids in der Form

$$V = V_0 = \text{const.}, \qquad (5)$$

und setzen $R_0 = \frac{k^2 M}{V_0}$, so ergibt sich, wenn wir die Gleichung (5) in bezug auf R lösen, dass

$$R = R_0 A_{00} + R_0 \sum_{n=2}^{n=4} \sum_{k=0}^{k=n} P_n^k (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) \qquad (6)$$

ist, wo die Koeffizienten A_{nk}, B_{nk} folgenderweise durch die Grössen (3) bestimmt werden:

$$
\left.\begin{aligned}
A_{00} &= 1 + \frac{2}{3}\sigma + \frac{32}{15}\sigma^2 - \frac{26}{15}\sigma c_{20} + \frac{4}{5}c_{20}^2 + \frac{12}{5}(c_{21}^2 + d_{21}^2) + \\
&\quad + \frac{48}{5}(c_{22}^2 + d_{22}^2), \\
A_{20} &= c_{20} - \frac{2}{3}\sigma - \frac{40}{21}\sigma^2 - \frac{2}{3}\sigma c_{20} + \frac{2}{7}c_{20}^2 + \frac{3}{7}(c_{21}^2 + d_{21}^2) - \\
&\quad - \frac{24}{7}(c_{22}^2 + d_{22}^2) \\
A_{21} &= c_{21} + \frac{3}{7}c_{20}c_{21} + \frac{12}{7}(c_{21}c_{22} + d_{21}d_{22});\quad B_{21} = d_{21} + \\
&\quad + \frac{2}{7}c_{20}d_{21} + \frac{12}{7}(c_{21}d_{22} - d_{21}c_{22}), \\
A_{22} &= c_{22} + 2\sigma c_{22} + \frac{3}{14}(c_{21}^2 - d_{21}^2) - \frac{4}{7}c_{20}c_{22};\quad B_{22} = d_{22} + \\
&\quad + 2\sigma d_{22} + \frac{3}{7}c_{21}d_{21} - \frac{4}{7}c_{20}d_{22}; \\
A_{30} &= c_{30}, \\
A_{31} &= c_{31};\quad B_{31} = d_{31}, \\
A_{32} &= c_{32};\quad B_{32} = d_{32}, \\
A_{33} &= c_{33};\quad B_{33} = d_{33}, \\
A_{40} &= c_{40} - \frac{8}{35}\sigma^2 + \frac{12}{5}\sigma c_{20} - \frac{108}{35}c_{20}^2 + \frac{216}{35}(c_{21}^2 + d_{21}^2) - \\
&\quad - \frac{216}{35}(c_{22}^2 + d_{22}^2), \\
A_{41} &= c_{41} + \frac{6}{5}\sigma c_{21} - \frac{108}{35}c_{20}c_{21} + \frac{108}{35}(c_{21}c_{22} + d_{21}d_{22});\quad B_{41} = \\
&\quad = d_{41} + \frac{6}{5}\sigma d_{21} - \frac{108}{35}c_{20}d_{21} + \frac{108}{35}(c_{21}d_{22} - d_{21}c_{22}), \\
A_{42} &= c_{42} + \frac{2}{5}\sigma c_{22} - \frac{36}{35}c_{20}c_{22} - \frac{18}{35}(c_{21}^2 - d_{21}^2);\quad B_{42} = d_{42} + \\
&\quad + \frac{2}{5}\sigma d_{22} - \frac{36}{35}c_{20}d_{22} - \frac{36}{35}c_{21}d_{21}, \\
A_{43} &= c_{43} - \frac{18}{35}(c_{21}c_{22} - d_{21}d_{22});\quad B_{43} = d_{43} - \frac{18}{35}(c_{21}d_{22} + d_{21}c_{22}), \\
A_{44} &= c_{44} - \frac{9}{35}(c_{22}^2 - d_{22}^2);\quad B_{44} = d_{44} - \frac{18}{35}c_{22}d_{22}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)
$$

Wenn wir die Ableitungen (1) nach den Koordinaten berechnen, so ergibt sich:

$$
g = g_0 C_{00} + g_0 \sum_{n=1}^{n=4} \sum_{k=0}^{k=n} p_n^k \,(C_{nk}\cos k\lambda + D_{nk}\sin k\lambda), \qquad (8)
$$

wo

$$
\left.\begin{aligned}
C_{00} &= 1 - \frac{8}{3}\sigma - \frac{68}{15}\sigma^2 - \frac{44}{15}\sigma c_{20} + \frac{4}{5}c_{20}^2 + \frac{12}{5}(c_{21}^2 + d_{21}^2) + \frac{48}{5}(c_{22}^2 + d_{22}^2),\\
C_{20} &= c_{20} + \frac{8}{3}\sigma + \frac{52}{21}\sigma^2 - \frac{76}{21}\sigma c_{20} - \frac{1}{7}c_{20}^2 - \frac{3}{14}(c_{21}^2 + d_{21}^2) + \frac{12}{7}(c_{22}^2 + d_{22}^2),\\
C_{21} &= c_{21} - \frac{36}{7}\sigma c_{21} - \frac{6}{7}(c_{21}c_{22} + d_{21}d_{22}) - \frac{1}{7}c_{20}c_{21};\ D_{21} = d_{21} - \\
&\quad - \frac{36}{7}\sigma d_{21} - \frac{6}{7}(c_{21}d_{22} - d_{21}c_{22}) - \frac{1}{7}c_{20}d_{21},\\
C_{22} &= c_{22} - \frac{68}{7}\sigma c_{22} + \frac{2}{7}c_{20}c_{22} - \frac{3}{8}(c_{21}^2 - d_{21}^2);\ D_{22} = d_{22} - \frac{68}{7}\sigma d_{22} + \\
&\quad + \frac{2}{7}c_{20}d_{22} - \frac{3}{14}c_{21}d_{21},\\
C_{30} &= 2c_{30},\\
C_{31} &= 2c_{31};\ D_{31} = 2d_{31},\\
C_{32} &= 2c_{32};\ D_{32} = 2d_{32},\\
C_{33} &= 2c_{33};\ D_{33} = 2d_{33},\\
C_{40} &= 3c_{40} + \frac{72}{35}\sigma^2 + \frac{24}{35}\sigma c_{20} - \frac{198}{35}c_{20}^2 + \frac{396}{35}(c_{21}^2 + d_{21}^2) - \frac{396}{35}(c_{22}^2 + d_{22}^2),\\
C_{41} &= 3c_{41} + \frac{12}{35}\sigma c_{21} - \frac{198}{35}c_{20}c_{21} + \frac{198}{35}(c_{21}c_{22} + d_{21}d_{22});\ D_{41} = 3d_{41} + \\
&\quad + \frac{12}{35}\sigma d_{21} - \frac{198}{35}c_{20}d_{21} + \frac{198}{35}c_{21}d_{22} - d_{21}c_{22}),\\
C_{42} &= 3c_{42} + \frac{4}{35}\sigma c_{22} - \frac{66}{35}c_{20}c_{22} - \frac{33}{35}c_{21}^2 - d_{21}^2);\ D_{42} = 3d_{42} + \\
&\quad + \frac{4}{35}\sigma d_{22} - \frac{66}{35}c_{20}d_{22} - \frac{65}{35}c_{21}d_{21},\\
C_{43} &= 3c_{43} - \frac{33}{35}(c_{21}c_{22} - d_{21}d_{22});\ D_{43} = 3d_{43} - \frac{33}{35}(c_{21}d_{22} + d_{21}c_{22}),\\
C_{44} &= 3c_{44} - \frac{33}{70}(c_{22}^2 - d_{22}^2);\ D_{41} = 3d_{44} - \frac{33}{35}c_{22}d_{22}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

Es sei hier bemerkt, dass φ und λ in den Formeln (6) und (8) keine geozentrischen Koordinaten mehr, sondern geographische Koordinaten bedeuten, die durch die Richtung der Normale zu dem Geoid bedingt sind. Den Übergang von den geozentrischen Koordinaten zu den geographischen lassen wir hier weg.

Die praktische Lösung der von uns aufgestellten Aufgabe lässt sich wie folgt denken: Jeder Schwerewert auf der Oberfläche des Geoids (die Frage betreffs fehlerfreier Reduktion der beobachteten Schwerewerte auf das Geoid lassen wir hier unerörtert) ergibt eine Bedingungsgleichung von der Art (8) mit 22 Unbekannten g_0C_{nk}, g_0D_{nk}. Durch Ausgleichung einer hinreichenden Anzahl von Beobachtungen der g-Werte lassen sich alle diese Unbekannten ermitteln, und wir können dann mit Hilfe der Forlmeln (9) ein System von 22 nichtlinearen algebraischen Gleichungen zur Bestimmung von g_0 und von 21 Grössen c_{nk}, d_{nk} aufstellen. Wenn wir dieses System gelöst (die Auflösung des Systems mit Hilfe der Iterationsmethode bietet durchaus keine Schwierigkeiten) und die auf diese Weise erhaltenen c_{nk}, d_{nk} in (7) eingesetzt haben, finden wir die Koeffizienten A_{nk} und B_{nk}. Schreiben wir der Grösse R einen bestimmten Wert zu, so lässt sich die Figur des Geoids durch die Formel (6) mit der von uns angenommenen Genauigkeit bestimmen.

Astronomisches Institut.
Leningrad

Eingegangen
d. 2. VI. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] F. Ackerl, ZS. f. Geophysik, 9, 270 (1933). [2] F. R. Helmert, Die math. u. phys. Theorien d. höheren Geodäsie, Leipzig (1884), II. Teil, 241.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

GEOPHYSIK

GRUNDSÄTZE DER METHODIK DER BESTIMMUNG DES GEOIDS AUF GRUND GRAVIMETRISCHER UND ASTRONOMISCH-GEODÄTISCHER BEOBACHTUNGEN

Von B. V. NUMEROV, korrespondierendem Mitglied der Akademie

Die genaue Gestalt und die Dimensionen des Geoids sind uns bis jetzt unbekannt. Da wir uns gegenwärtig mit der Methodik dieses Problems beschäftigen und entsprechendes Tatsachenmaterial sammeln, können wir in nächster Zeit an die Lösung dieses Problems herantreten.

Bei der Bestimmung des Geoids haben wir zwei Einzelaufgaben zu betrachten. Die erste Aufgabe besteht in der Bestimmung des allgemeinen Geoids, einer regulären mathematischen Fläche, die durch Entwicklung des Radius nach den Kugelfunktionen (höchstens bis zur 4-ten Ordnung) ermittelt wird. Die zweite Aufgabe besteht in der Bestimmung lokaler «Undulationen» des Geoids, bezogen auf die allgemeine Figur.

Aus meiner gemeinsam mit D. Chramov ausgeführten Arbeit (Siehe S. 265) geht hervor, dass sich das Problem der Bestimmung der Form des allgemeinen Geoids an Hand der uns bekannten Entwicklungen der Schwerkraft nach den Kugelfunktionen der Länge und der Breite (bis zur 4-ten Ordnung) unter Anwendung der Methode successiver Annäherungen praktisch lösen lässt.

Wenn wir die Form des Geoids aus Schweremessungen bestimmt und das Normalgesetz der Schwereverteilung auf dem allgemeinen Geoid erhalten haben, können wir die lokalen Schwereanomalien berechnen.

Sind uns die Schwereanomalien in bezug auf das allgemeine Geoid bekannt, so lassen sich die astronomischen Beobachtungen in den Punkten der Triangulationen 1-ster Klasse für die lokalen Anomalien oder «Undulationen» des Geoids nach Integralformeln (1) korrigieren.

Die so korrigierten Koordinaten werden nun den Beobachtungen auf dem Geoid 4-ter Ordnung entsprechen. Daraufhin können wir wieder an die Bestimmung der Figur des Geoids 4-ter Ordnung an Hand astronomisch-geodätischer Beobachtungen in den Punkten der Triangulation 1-ster Klasse herantreten. Hierzu wird man die Bearbeitung der Triangulationen auf dem Geoid 4-ter Ordnung vornehmen müssen, und zwar unter Benutzung der für die lokalen Anomalien korrigierten astronomischen Koordinaten, sowie auch der Seiten der Dreiecke, die im Laufe der Triangulationsarbeiten gemessen wurden.

Wir wählen auf dem Geoid den ersten Punkt mit den korrigierten astronomischen Koordinaten φ_1 und λ_1.

Da der Abstand von dem zweiten Punkt der Triangulation bis zum ersten Punkt S und der Azimuth α der Richtung vom ersten Punkt nach dem zweiten (längs der geodätischen Linie) bekannt sind, können wir—auf Grund der allgemeinen Entwicklung des Radius des Geoids bis zur 4-ten Ordnung—Formeln zur Berechnung der geodätischen Koordinaten φ_2 und λ_2 des zweiten Punktes erhalten, in Abhängigkeit von den vier Argumenten $\varphi_1, \lambda_1, s, \alpha$ und von den unbekannten Koeffizienten, die in der Entwicklung des Radius des Geoids auftreten. Unserer Bedingung gemäss müssen die geodätischen Koordinaten des zweiten Punktes mit den astronomischen zusammenfallen. Folglich können wir zwei Bedingungen aufstellen, indem wir die Differenzen zwischen den astronomischen, gemessenen Koordinaten und den geodätischen, berechneten gleich Null setzen. Diese zwei Bedingungen werden die unbekannten Koeffizienten in der Entwicklung des Radius des Geoids enthalten. Auf diese Weise erhalten wir zwei Bedingungsgleichungen, die denjenigen für die Schwerkraft analog sind.

Je zwei Triangulationspunkte werden zwei Bedingungsgleichungen liefern.

Wenn wir sämtliche Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate lösen, können wir die Figur des allgemeinen Geoids 4-ter Ordnung bestimmen und sie mit dem Geoid vergleichen, der auf Grund der Schwerebeobachtungen erhalten worden ist, oder das Geoid aus den astronomisch-geodätischen und gravimetrischen Beobachtungen ableiten.

Die Schwereanomalien und die Lotabweichungen in bezug auf das allgemeine Geoid (4-ter Ordnung) werden es fernerhin ermöglichen, lokale Abweichungen oder Undulationen des Geoids zu bestimmen.

Am einfachsten wäre es dazu die Stokes'sche Formel zu benutzen oder das lokale Geoid nach bekannten Richtungen der Lotlinien zu konstruieren.

Obige Theorie der Bestimmung des allgemeinen Geoids muss durch ein fiktives Beispiel begründet werden, welches es gestatten würde, die Methodik einzelner Teile der Untersuchung endgültig auszuarbeiten.

Astronomisches Institut.
Leningrad

Eingegangen
d. 9. VI. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] B. V. Numerov, Bull. Inst. Astron., Léningrad, № 34 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

PHYSIK

FLUORESZENZAUSBEUTE UND -DAUER

Von S. I. WAWILOW, Mitglied der Akademie

§ 1. Der Begriff der Fluoreszenzausbeute bedarf gewisser Erläuterungen und Einschränkungen. Bezeichnen wir durch $id\ \lambda$ die im Spektralintervall λ, $\lambda + d\lambda$ ausgestrahlte relative Energie und durch A die absorbierte monochromatische Energie. Die übliche Definition der Ausbeute ρ lautet:

$$\rho = \frac{k\int_0^\infty id\,\lambda}{A}. \qquad (1)$$

(k ist der den relativen Wert der Energie in den absoluten überführende Faktor). Eine solche Definition ist zu weit gefasst und nicht konkret und kann daher nur in seltenen Fällen ein physikalisches Interesse bieten. Im allgemeinen ändert sich bei Veränderungen des Mediums sowohl die Funktion i, als auch k, und der Charakter der Veränderungen hängt von der Spektralverteilung der absorbierten Energie ab. In der Definition (1) ist, z. B., auch die Ausstrahlung im fernen Ultrarot einbegriffen, wo niemals Messungen vorgenommen werden und der Mechanismus der Ausstrahlung ein gänzlich anderer ist als im optischen Gebiet. Für die meisten Aufgaben der Atomphysik bietet daher das differentiale Verhältnis $\frac{kid\lambda}{A}$ unstreitig ein grösseres Interesse als das Integral (1). Im Gebiet der molekularen Erscheinungen kommen jedoch sehr häufig ziemlich breite Spektralbanden vor, die sich bei Veränderungen des Mediums wie ein Ganzes verhalten (Unabhängigkeit von i von der Wellenlänge des anregenden Lichtes, von der Temperatur, Viskosität usw.). Für solche Banden ist der Begriff der Ausbeute von wesentlicher Bedeutung. Die Gleichung (1) lässt sich in folgender Gestalt darstellen:

$$\rho = \sum \frac{k_i}{A}\int_{\lambda_i}^{\lambda_k} id\lambda = \sum \rho_i, \qquad (2)$$

wo die Grenzwerte λ_i, λ_k sich auf die praktischen Spektralgrenzen der einzelnen Banden oder Linien beziehen. Im Falle der Überlagerung dieser Banden können sich die Grenzwerte gegenseitig überdecken. Aus

dem oben dargelegten geht klar hervor, dass nicht die allgemeine Integralbeziehung (1) oder (2) sondern das Teilintegral:

$$\rho_i = \frac{k_i}{A} \int_{\lambda_i}^{\lambda_k} i d\lambda, \qquad (3)$$

von Interesse ist.

Der einfachste Fall ist derjenige wenn bei physikalisch-chemischen Veränderungen i konstant bleibt, d. h. $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda = \text{const}$. Bei Überführung der Substanz aus einem Lösungsmittel in ein anderes werden gewöhnlich die Fluoreszenz- und Absorptionsspektren im gleichen Abstande auf der Frequenzskala verschoben und bewahren ihre frühere Form. $\int_{\lambda_i}^{\lambda_k} i d\lambda$ bewahrt dabei seinen Wert bei entsprechender Veränderung der Grenzwerte.

Die Wahl der Grenzwerte und die Art der Funktion i gewährleistet nicht immer in vollem Masse die Isoliertheit und Unversehrtheit der Bande. Es sind Fälle bekannt, wo die beobachtete Bande als Überlagerung identischer Spektren mit scharf von einander abweichender Leuchtdauer τ erscheint. So entspricht beispielsweise in festen Lösungen von Rhodulin N. Orange in Zucker ein und dasselbe Spektrum einer Leuchtdauer von 10^{-9} Sek. und 1 Sek. Zur Bestimmung der wahren Fluoreszenzausbeute für die isolierte Bande ρ_i ist in diesem Falle eine phosphoroskopische Trennung erforderlich.

Weiterhin haben wir, wenn von der Fluoreszenzausbeute ρ die Rede ist, die auf die isolierte Bande bezugnehmende Definition (3) im Auge.

Im Zusammenhang mit den experimentellen Messungen der Ausbeute dürfte es nicht überflüssig sein, daran zu erinnern, dass die Fluoreszenz im allgemeinen Falle als anisotropes Leuchten (Polarisation) anzusehen ist. Es wurde bei der Diskussion der experimentellen Ergebnisse von A. N. Sevčenko, B. J. Sweschnikow und dem Verfasser festgestellt, dass diese Anisotropie bei der Bestimmung der Ausbeute gewöhnlich nicht in Betracht gezogen wird. Die Messung der Ausbeute führt (unvermeidlich) zur Messung der Helligkeit der Fluoreszenz auf einer gewissen Fläche, die den Schnitt eines die Anisotropie der Fluoreszenz charakterisierenden zweiachsigen Ellipsoids bildet. Die Helligkeit kann als Grösse dargestellt werden, die der Energiesumme zweier aufeinander senkrecht stehender Vektoren proportional ist, z. B. eines horizontalen und eines vertikalen, $a^2 + b^2$. Gewöhnlich wird $a^2 + b^2$ als eine der Ausbeute proportionale Grösse angesehen. Es ist indessen einleuchtend, dass zum Zweck einer vollständigen Berechnung der Ausbeute auch die dritte Komponente in Betracht zu ziehen ist, deren Energie, den Symmetrieverhältnissen gemäss (Zweiachsigkeit des Ellipsoids), a^2 oder b_2 gleichgesetzt werden muss, je nach der Anordnung.

Im ersten Falle geht die wahre Ausbeute nicht mit $a^2 + b^2$ proportional sondern mit $2a^2 + b^2$, im zweiten mit $a^2 + 2b^2$, und die photometrischen Daten müssen reduziert werden im Verhältnis von

$$r = \frac{2a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \text{ oder } \frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Die Korrektur kann auf Grund der Messungen der Fluoreszenzpolarisation angebracht werden, die das Verhältnis von $\frac{a^2}{b^2}$ ergeben; eine besonders wesentliche Bedeutung gewinnt sie in den Fällen, wo die Polarisation der Fluoreszenz sich mit den Versuchsbedingungen ändert. Es ist leicht zu ersehen, dass, falls bei der gewählten Beobachtungsrichtung die Strahlung nicht polarisiert, in anderen möglichen Richtungen aber polarisiert ist, eine Korrektur sich gleichfalls als notwendig erweist. Selbstverständlich bezieht sich die vorliegende Bemerkung nicht nur auf die Fluoreszenz, sondern auch auf die Resonanzstrahlung und die Lichtstreuung, wenn die Veränderung des Streuungskoeffizienten mit einer Veränderung der Polarisation verknüpft ist. Bei der Bremsstrahlung kann eine Anisotropie von ganz anderem Charakter stattfinden, die gleichfalls bei der Ausbeutebestimmung zu berücksichtigen ist.

§ 2. Die Fluoreszenzausbeute kann innerhalb des gesamten zugänglichen Intervalles von 0 bis 1 Veränderungen unterworfen sein. Die Ursachen der Abweichung der Ausbeute von 1, d. h. der Auslöschung der Fluoreszenz, sind sehr mannigfaltig. Sie lassen sich indessen in zwei prinzipiell verschiedene Gruppen einteilen.

Die Lichtabsorption auf den Elektronenniveaus des Moleküls kann von folgenden Prozessen begleitet sein: 1) Ionisierung oder Dissoziation des Moleküls, 2) Verteilung der Energie nach Vibrations-Rotations Freiheitsgraden des Moleküls, 3) Elektronenanregung, 4) Kombination aller oder einiger der erwähnten Verteilungsarten der absorbierten Energie.

Das bei der Lichtabsorption auftretende Leuchten kann sowohl das Ergebnis des Aufhebens des angeregten Zustands bilden, als auch durch die Rekombination der dissoziierten Teile des Moleküls oder die Bremsstrahlung der Ionen und Elektronen hervorgerufen werden. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des ersten, am häufigsten vorkommenden Falles. Bei einer solchen Beschränkung kommen der erste und der zweite Prozess einer Auslöschung der Fluoreszenz gleich, der vierte Prozess muss eine teilweise Auslöschung zur Folge haben, und lediglich der dritte Fall kann einer maximalen Ausbeute entsprechen.

Mit den oben angeführten Fällen sind die für das isolierte Molekül möglichen Auslöschungsarten erschöpft. Diese Auslöschung, die wir als Auslöschung erster Art bezeichnen wollen, wird durch ihre sehr kurze Dauer gekennzeichnet, sie vollzieht sich in einem Zeitraum von der Grössenordnung der Periode der Molekülschwingungen (10^{-12} — 10^{-14} Sek.). Während dieses Zeitabschnitts kann der Einfluss der benachbarten diffundierenden Moleküle nicht in merklicher Weise zutage treten. Mithin wird die zu diesem Typus gehörende Auslöschung ausschliesslich durch die Eigenschaften der absorbierenden Moleküle bestimmt und kann nicht von Kinetik der im Medium sich vollziehenden Vorgänge abhängen.

Jedoch sind hierauf die Auslöschungsprozesse nicht beschränkt. Es ist möglich, dass ein Teil der in dem betreffenden Spektralgebiet zur Anregung dienenden Energie nicht ausgestrahlt wird, wenn nämlich während des angeregten Zustandes Zussammenstösse zweiter Art oder chemische Vorgänge mit angeregten Molekülen vorkommen. Dieser Typus der Auslöschung, die wir Auslöschung zweiter Art nennen wollen, hängt von der Dauer des angeregten Zustandes τ, die verhältnismässig gross sein kann (z. B. 10^{-9} Sek. bis 1 Sek.), und folglich von den die Kinetik

des Mediums bestimmenden Eigenschaften (Konzentration der auslöschenden Moleküle, Temperatur, Viskosität u. s. w.) ab.

Die Kinetik der Auslöschung zweiter Art hängt offenbar nicht von der Auslöschung erster Art ab, da letztere beim Beginn der Entwicklung der ersteren bereits zum Abschluss gelangt ist. Bezeichnen wir mit $1-s$ den für die Auslöschung erster Art verbrauchten Anteil absorbierter Energie und führen wir den Begriff ρ_2 der wahren Ausbeute, die der Auslöschung zweiter Art entspricht, ein:

$$\rho_2 = \frac{k_l \int_{\lambda_f}^{\lambda_k} i_\lambda d\lambda}{sA_\lambda}. \tag{4}$$

Aus (3) gewinnen wir identisch:

$$\rho = s\rho_2. \tag{5}$$

In Anbetracht der Unabhängigkeit der beiden Arten der Auslöschung von einander kann die theoretische Berechnung der beiden Faktoren s und ρ_2 im Rahmen der von einander unabhängigen Theorien der Auslöschung erster und zweiter Art erfolgen.

§ 3. Die den in § 2 gemachten Schlüssen zu Grunde gelegte Annahme von dem spontanen Charakter der Strahlung verschafft die Möglichkeit einer noch grösseren Detaillierung der Formel (5). F. Perrin[1]) hat als erster darauf hingewiesen, dass für die angeregten Moleküle, die während der Ausleuchtung einer allmählichen Auslöschung unterliegen, das Verhältnis der Lichtsumme zur mittleren Dauer der Anregung unter allen Bedingungen unverändert bleiben muss, wenn die Konstante der spontanen Strahlung sich nicht verändert. Wir ermitteln die zwischen der Ausbeute und der Anregunsdauer bestehende Beziehung für den allgemeinen Auslöschungsfall, indem wir teilweise F. Perrin's Ableitungen benutzen.

Berechnen wir zunächst «die wahre Ausbeute der Auslöschung zweiter Art» ρ_2, unter der Voraussetzung, dass während des Zeitraums dt die gesamte Anregungsenergie bei einem stationären Fluoreszenzvorgang sA_0dt beträgt. Das Leuchten im Zeitintervall zwischen t und $t+dt$ ergibt sich als eine Summe der Ausleuchtung der zu verschiedenen Zeiten ϑ absorbierten Energie. Wir bezeichnen den während des Zeitraums von 0 bis $0+d\vartheta$ absorbierten und zur Zeit t als Anregungsenergie erhalten gebliebenen Energieanteil durch $f(t-\vartheta)$. Zur Zeit t beträgt diese Energiemenge $sA_0 f(t-\vartheta)\,dt$. Es ist klar, dass bei $t=0$ $f=1$ ist; verläuft jedoch die Abklingung im Vergleich zu t (der Beobachtungszeit) genügend schnell, so ist, bei $t \gg \vartheta$, $f \sim 0$.

Infolge des Spontaneität der Strahlung muss die Energie der Fluoreszenz während des Zeitraums von t bis $t+dt$ offenbar

$$dF = RsA_0\Big[\int_0^t f(t-\vartheta)\,d\vartheta\Big]dt \tag{6}$$

sein, wo R die Konstante der spontanen Strahlung ist. Die Ausbeute ρ_2 lässt sich also in folgender Form ausdrücken:

$$\rho_2 = \frac{RsA_0\big[\int_0^t f(t-\vartheta)\,d\vartheta\big]dt}{sA_0dt} = R\int_0^t f(t-\vartheta)\,d\vartheta. \tag{7}$$

Ermitteln wir jetzt den Mittelwert der Dauer der angeregten Zustände (und, wie leicht zu ersehen ist, zugleich der Leuchtdauer) τ.

Im allgemeinen Fall eines beliebigen Abklingungsgesetzes, wird τ durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\tau = \frac{sA_0 \left[\int_0^t (t-\theta)\, df\right] dt}{tA_0 dt} = \int_0^t (t-\theta)\, df = \Big|_0^t (t-\theta) f + \int_0^t f d\theta. \qquad (8)$$

Nach Einsetzung der Grenzwerte (unter stationären Bedingungen, vgl. oben) erhält das erste Glied des letztgenannten Ausdrucks den Wert Null, folglich ergibt der Vergleich von (7) und (8)

$$\frac{\rho_2}{\tau} = R, \qquad (9)$$

und wir ermitteln, die Gleichung (5) benutzend, den Wert der Ausbeute ρ:

$$\rho = sR\tau. \qquad (10)$$

Die physikalische Bedeutung der Konstante R tritt klar zutage, wenn wir den Grenzfall, wo es keine Auslöschung gibt ($\rho = 1$, $s = 1$), ins Auge fassen:

$$R = \frac{1}{\tau_0}, \qquad (11)$$

τ_0 bedeutet die Lebensdauer des angeregten Zustandes bei fehlender Auslöschung. Mithin ist

$$\rho = \frac{s\tau}{\tau_0}. \qquad (12)$$

§ 4. Die Gleichung (12) kann der experimentellen Analyse der Natur der Fluoreszenzauslöschung zu Grunde gelegt werden, wofern ρ, τ und bis zu einem gewissen Grade auch τ_0 eine direkte oder indirekte Messung zulassen. In vielen Fällen gestattet (12) die Frage der Zugehörigkeit der Auslöschung zur ersten oder zweiten Art zu lösen, wodurch auf einmal eine Reihe von Deutungen der Auslöschungen in Wegfall kommt (elektrolytische Dissoziation, Koagulation, chemische Prozesse, Aussalzung u. s. w.).

Die Gleichung (12) umfasst alle Fälle der Auslöschung des spontanen Leuchtens. Im allgemeinen Falle können sich alle drei den Wert von ρ bestimmenden Grössen, nämlich s, τ und τ_0, im Laufe physikalisch-chemischer Prozesse verändern. Wir fassen besondere Fälle ins Auge.

Der Wert von τ_0 wird durch die Struktur des fluoreszierenden Moleküls bedingt. Bei im Medium erfolgender Auslöschung kann im allgemeinen von einer unmittelbaren Messung von τ_0 keine Rede sein. Zur Abschätzung des Wertes von τ_0 kann lediglich das Absorptionsspektrum dienen. T. P. Krawez [2] war der erste, der einen Zusammenhang zwischen der im Spektrum durch die Absorptionskurve begrenzten Fläche und den das klassische Dekrement der Abklingung bestimmenden Konstanten aufgedeckt hat. Hieraus geht sofort hervor, dass τ_0 in umgekehrt proportionalem Verhältnis zum Integral der Absorptionskurve stehen muss. Diese Schlussfolgerung hat in der Interpretation der Quantentheorie wiederholt zur Bestimmung von τ_0 Anwendung gefunden; eine solche Methode verbürgt jedoch, infolge der Unbestimmtheit der Grenzen des Anregungsspektrums, in vielen Fällen nicht die Gewinnung genauer Werte für τ_0 (in den Farbstofflösungen erstrecken sich z. B. die Anregungsspektren sehr weit, und es ist sehr schwierig die isolierten Banden abzusondern, auf die die erwähnte

Bezienung anwendbar ist). Andererseits wird, vom Standpunkt der Quanteninterpretation, die Grösse der Absorption durch zwei Faktoren bestimmt, und zwar durch die Konzentration der absorbierenden Moleküle und durch die Wahrscheinlichkeit der stattfindenden Quantenübergänge zwischen den Energieniveaus. Eine Veränderung der Absorption kann infolge der Veränderung der Anzahl der absorbierenden Moleküle eintreten, z. B. infolge chemischer Umwandlungen (in welchem Falle τ_0 keiner Veränderung unterliegt), oder aber infolge einer Änderung der Wahrscheinlichkeit der Übergänge (was einer Veränderung von τ_0 gleichkommt). Zur Feststellung der wirklichen Ursache der Veränderung der Absorption bedarf es einer besonderen experimentellen Untersuchung. Es lässt sich nur behaupten, dass die Konstanz des Absorptionsspektrums, die sowohl hinsichtlich der Abhängigkeit von der Wellenlänge als auch in bezug auf die absolute Grösse besteht, ein Beleg füs die Konstanz von τ_0 ist. Sind die Deformationen des Spektrums gering oder kommen sie bloss in einer Verschiebug des Spektrums auf der Wellenskala zum Ausdruck, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit auf eine praktische Konstanz von τ_0 zu schliessen. Ändert sich das Absorptionsspektrum bloss hinsichtlich seiner Grösse, während die frühere spektrale Verteilung erhalten bleibt, so liegt es nahe, auf eine Verringerung der Kozentration der absorbierenden Moleküle bei unverändertem Wert vom τ_0 zu schliessen. Ist also eine Veränderung der Konzentration der absorbierenden Moleküle ausgeschlossen, so können wir, unter Berücksichtigung der erwähnten Einschränkungen, annehmen, dass

$$\tau_0 = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{A}$ das Integral der Absorptionskurve und γ die konstante Grösse bezeichnen. In diesem besonderen Falle erhällt (12) die Gestalt:

$$\rho = \frac{s\tau\mathfrak{A}}{\gamma} \tag{12'}$$

Ändert sich im Falle der Konstanz von τ_0 (oder bei $\mathfrak{A}$=const.) das Verhältnis von $\frac{\rho}{\tau}$ bei diesen oder jenen physikalisch-chemischen Veränderungen des Mediums, so ändert sich auf Grund von (12) die Auslöschung erster Art, d. h. s. Wenn sich dabei auch τ nicht ändert, so fehlt die Auslöschung erster Art oder sie bleibt unverändert.

Von praktischer Bedeutung ist der Fall der Konstanz von $\frac{\rho}{\tau}$ bei gleichzeitiger Veränderung von ρ und τ. Die Bedingung:

$$\frac{s}{\tau_0} = \text{const}, \tag{14}$$

kann bei Unveränderlichkeit von s und τ_0 bestehen, d. h. im Falle der Unveränderlichkeit der Auslöschung erster Art. Allgemein gesprochen, kann sie auch bei einer proportionalen Veränderung von s und τ_0 in Kraft treten. Indessen kann eine solche proportionale Veränderung, wie aus der Definition von s und τ_0 hervorgeht, nur zufällig auftreten, daher ist die Bedingung (14) als Beweis anzusehen für das Fehlen der Auslöschung erster Art oder aber als Beleg für deren Konstanz.

Optisches Institut.
Leningrad

Eingegangen
d. 31. VII. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] F. Perrin. La fluorescence des solutions, Paris (1929). [2] Т. П. Кравец, Абсорбция света в растворах окрашенных веществ, Москва (1912).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

PHYSIK

AUSLÖSCHUNG DER FLUORESZENZ DURCH DAS LÖSUNGSMITTEL

Von S. I. WAWILOW, Mitglied der Akademie, und A. N. SEVČENKO

§ 1. Falls die Fluoreszenz einem spontanen Verlauf der Ausleuchtung entspricht, muss folgende Beziehung zwischen der Fluoreszenzausbeute ρ und der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustandes der Moleküle τ bestehen:

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{s}{\tau_0}, \tag{1}$$

hier ist s der Teil der absorbierten Energie, welcher der Auslöschung erster Art nicht unterliegt [vgl. (1)], und τ_0 die Lebensdauer des angeregten Zustandes, wenn die Auslöschung zweiter Art fehlt.

Wenn die Veränderungen im Fluoreszenzmedium keinen Einfluss auf die Konzentration der absorbierenden Moleküle ausüben, lässt sich (1), unter gewissen Einschränkungen, in folgender Form schreiben:

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{s\mathfrak{A}}{\gamma}, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{A}$ das Integral der Absorptionskurve und γ eine unveränderliche Grösse ist.

In vorliegender Arbeit dient uns die Formel (1) zur Analyse verwickelter Fälle der Auslöschung von Lösungen des Rhodamins B. In der Reihe fluoreszierender Farbstoffe nimmt dieser Stoff eine anomale Stellung ein. Wenn er im aufgelösten Zustande erwärmt wird, nimmt die Fluoreszenzausbeute stark ab. Dabei verändert sich die Polarisation des Leuchtens in zähflüssigen Lösungen durch das Erwärmen sehr wenig, was in Lösungen anderer Farbstoffe nicht der Fall ist. In der letzten Zeit hat W. L. Lewschin (2) ein scharfes Sinken der Rhodaminabsorption beim Erwärmen mehrerer Lösungsmittel festgestellt und dabei eine davon unabhängige Auslöschung der Fluoreszenz beobachtet. Die Messungen der Fluoreszenzausbeute und -lebensdauer verschaffen uns die Möglichkeit, uns in diesen Erscheinungen zurechtzufinden und das Vorhandensein einer neuen Art von Auslöschung der angeregten Moleküle durch das Lösungsmittel nachzuweisen.

Zur Messung von ρ und τ ist es hier angebracht, von einer gleichzeitigen Messung der relativen Ausbeute und der Polarisation der Fluoreszenz

Gebrauch zu machen. Die von W. L. Lewschin und F. Perrin entwickelte Polarisationstheorie führt uns (in der Perrin'schen Form) zur folgenden Formel:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{3}\right)\tau \frac{R \cdot T}{v \cdot \eta}. \tag{3}$$

Hier ist p Polarisationsgrad bei den gegebenen Bedingungen, p_0 — Grenzpolarisation, R — Gaskonstante, T — absolute Temperatur, v — Molekularvolumen, η — Viskosität des Mediums.

Bei Temperaturänderungen der Rhodaminlösungen (die in § 2 behandelt werden) bleiben das Absorptions- und Fluoreszenzspektrum unverändert, daher ist τ_0 in Formel (1) eine konstante Grösse. Die Unveränderlichkeit des Spektrums gestattet auch die Grenzpolarisation p_0 im ganzen Temperaturintervall als eine konstante Grösse zu betrachten. Aus (1) folgt, dass $\tau = \frac{\rho}{s}\tau_0$ ist. Dieser Wert muss statt τ in (3) eingesetzt werden. Jedoch stösst eine genaue Messung von ρ und τ_0 auf Schwierigkeiten, deswegen ist es zweckmässig, relative Werte zu gebrauchen. Bezeichnen wir die beliebigen Anfangswerte von ρ, τ und s (z. B. bei Zimmertemperatur) mit ρ_1, τ_1 bzw. s_1. Bei konstantem τ_0 ist offenbar:

$$\tau = \frac{\rho}{\rho_1}\frac{s_1}{s}\tau_1. \tag{4}$$

Durch Substitution in (3) erhalten wir:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{3}\right)\tau_1 \frac{\rho}{\rho_1}\frac{s_1}{s}\frac{R \cdot T}{v \cdot \eta}. \tag{5}$$

Wenn bei Temperatur- und Viskositätsänderungen die Auslöschung erster Art konstant bleibt und nur die Auslöschung zweiter Art Veränderungen erleidet, so ist $s_1 = s$ und $\frac{1}{p}$ eine lineare Funktion von $\frac{\rho}{\rho_1}\frac{T}{\eta}$. Der Winkelkoeffizient der Geraden muss dabei den richtigen Wert τ_1 ergeben. Im entgegengesetzten Falle, d. h., wenn sich die Auslöschung erster Art beim Erwärmen verändert, ist $s_1 \neq s$ und die lineare Abhängigkeit wird dadurch gestört. Fehlt oder verändert sich ausserdem die Auslöschung zweiter Art, so bleibt τ konstant, d. h. auf Grund von (4) ergibt sich:

$$\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{s_1}{s} = 1, \tag{6}$$

und $\frac{1}{p}$ ist eine lineare Funktion von $\frac{T}{\eta}$ mit einem Winkelkoeffizienten, der den richtigen Wert von τ gibt.

§ 2. Wir gehen jetzt zu den Ergebnissen über, indem wir auf eine nähere Beschreibung der Experimente verzichten, die an einem anderen Orte angeführt sein wird. In Tabelle 1 sind die Messungen der Ausbeute und Polarisation für Rhodamin B in Glyzerin bei verschiedenden Temperaturen angegeben. Die Konzentration der Lösung beträgt $2.5 \cdot 10^{-6}\ \frac{g}{cm^3}$.

Tabelle 1

T	289°	293°	303°	308°	318°	328°	333°	343°	353°	358°	363°
$\frac{\rho}{\rho_1}$	1.00	0.93	0.86	0.82	0.73	0.58	0.54	0.43	0.39	0.36	0.28
$\frac{\rho}{\rho_1}\frac{T}{\eta}$	142	200	366	552	751	1018	1212	1480	1889	2109	2240
$\frac{1}{p}$	2.9	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.1	4.3	4.7	5.0	5.4

In Fig. 1 sind diese Ergebnisse graphisch veranschaulicht. Auf der Abszissenachse sind die Werte von $\frac{\rho}{\rho_1}\frac{T}{\eta}$ aufgetragen, auf der Ordinatenachse diejenigen von $\frac{1}{p}$. Es ist eine regelrechte lineare Abhängigkeit vorhanden; der Wert von τ, nach Formel (5) unter der Voraussetzung berechnet, dass $s_1 = s$,

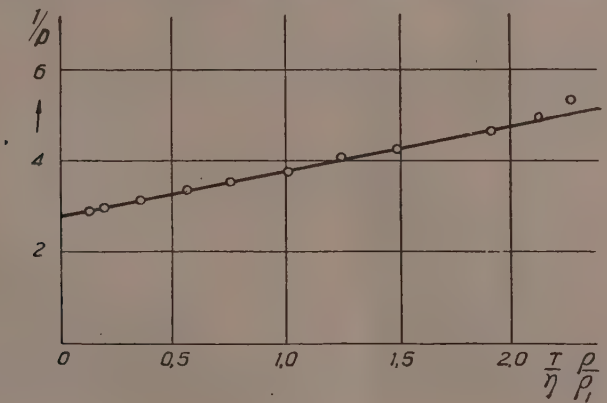

Fig. 1.

beträgt $2.8 \cdot 10^{-9}$ Sek., was mit anderen, unabhängig ausgeführten Messungen übereinstimmt. Wenn wir die Unveränderlichkeit der Absorptions- und Fluoreszenzspektren beim Erwärmen in Betracht ziehen (d. h. eine unzweifelhafte Konstanz von τ_1), so können wir als nachgewiesen annehmen, dass die Auslöschung von Rhodamin bei Erwärmung in Glyzerin eine Auslöschung zweiter Art ist, bei der die angeregten Moleküle ausgelöscht werden. Diese Auslöschung lässt sich nicht auf die Wirkung anderer Rhodaminmoleküle oder der Moleküle fremder Stoffe auf das angeregte Molekül zurückführen, da ihre Konzentration hierzu ganz ungenügend ist. Ausserdem zeigen die Vorversuche, dass die Auslöschung von Rhodamin beim Erwärmen von der Konzentration des Farbstoffes unabhängig ist. Nur die Einwirkung des Lösungsmittels auf die angeregten Moleküle kann als einzige Ursache der Auslöschung gelten. Auf dieses Ergebnis kommen wir noch in § 5 zurück.

§ 3. Die Eigenschaften der Fluoreszenz von Rhodamin B in vielen anderen Lösungsmitteln (Wasser, Alkohole u s. w.) sind die gleichen wie in Glyzerin, d. h. wir haben beim Erwärmen mit der Auslöschung zweiter Art zu tun. Jedoch wird diese Erscheinung in einigen Lösungsmitteln verwickelter. In den Tabellen 2 u. 3 sind Messungen in Isobutyl- und Isoamylalkohol angeführt, mit α ist der Absorptionsindex der grünen Quecksilberlinie bezeichnet. Wie aus der Tabelle ersichtlich, nimmt die Absorption beim Erwärmen stark ab. Unabhängig davon vermindert sich die Fluoreszenzausbeute $\frac{\rho}{\rho_1}$, die sich auf die Einheit der absorbierten Energie bezieht, d. h. unabhängig von α ist. Im Fluoreszenzspektrum treten keine merkliche Veränderungen auf.

Tabelle 2

T	293°	298°	303°	313°	318°	323°	328°	333°	338°	343°
η	0.0451	0.0388	0.0320	0.0245	0.0200	0.0168	0.0146	0.0113	0.0091	0.0081
$\frac{1}{p}$	7.2	7.6	8.2	9.7	11.7	13.6	15.3	19.8	25.5	29.2
α	1.00	0.86	0.78	0.64	0.57	0.51	0.44	0.40	0.35	0.30
$\frac{\rho}{\rho_1}$	1.00	0.95	0.92	0.82	0.76	0.72	0.67	0.63	0.57	0.51
$\frac{\rho}{\rho_1}\frac{T}{\eta}\cdot 10^{-4}$	0.65	0.73	0.90	1.04	1.18	1.38	1.50	1.85	2.11	2.49

Tabelle 3

T	293°	303°	308°	313°	318°	323°	329°	333°	338°	343°
η	0.0312	0.0272	0.0235	0.0196	0.0168	0.0145	0.0120	0.0098	0.0075	0.0052
$\frac{1}{p}$	8.01	8.5	9.8	11	12.8	14.2	16	20	25.6	35.7
α	1.00	0.86	0.77	0.65	0.55	0.50	0.44	0.41	0.34	0.33
$\frac{\rho}{\rho_1}$	1.00	0.94	0.90	0.83	0.77	0.73	0.67	0.64	0.57	0.50
$\frac{\rho}{\rho_1}\frac{T}{\eta}\cdot 10^{-4}$	0.94	1.05	1.18	1.33	1.47	1.62	1.81	2.19	2.58	3.04

Formel (5) setzt die Konstanz von τ_0 voraus. In unserem Falle tritt diese Voraussetzung nicht vollständig klar zutage, da sich die Absorption ändert [vgl. Formel (2)]. Daher wollen wir zuerst die allgemeine Formel (3) anwenden, indem wir als Variable $\frac{1}{p}$ und $\frac{T}{\eta}$ wählen. Die Ergebnisse sind für beide Lösungen in Fig. 2 und 3 durch gezogene Linien dargestellt. Bei einer solchen Darstellung der Ergebnisse erhalten wir

eine unzweifelhafte lineare Abhängigkeit, die die Konstanz von τ beim Erwärmen trotz der Auslöschung bestätigt. Die Werte von τ kann man aus der Neigung der Geraden berechnen, die für Isoamylalkohol $4 \cdot 10^{-9}$ und für Isobutylalkohol $3.5 \cdot 10^{-9}$ Sek. betragen, was mit den nach einer anderen Methode (§ 4) ermittelten Werten übereinstimmt.

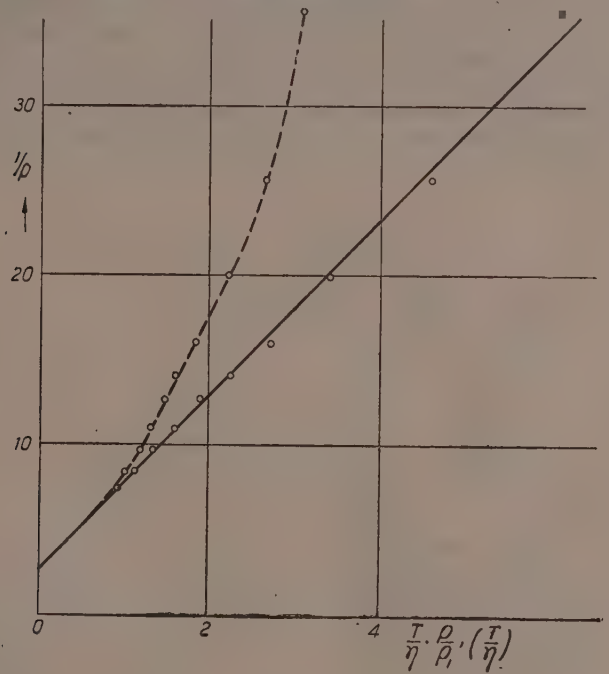

Fig. 2.

Nachdem wir auf Grund von (1) statt τ die Funktion $\frac{\rho}{s}\tau_0$ in (3) eingesetzt haben, tragen wir auf der Abszissenachse den relativen Wert von $\rho\frac{T}{\eta}$ auf.

Entstünde dadurch eine Gerade, so wäre damit die Konstanz von $\frac{\tau_0}{s}$ bewiesen. In Wirklichkeit haben wir, wie aus den gestrichelten Kurven zu ersehen ist (Fig. 2 und 3), eine scharfe Abweichung von der Linearität, mit anderen Worten, $\frac{\tau_0}{s}$ ist nicht konstant.

Ein Vergleich der beiden Beziehungen:

$$\tau = \text{const}, \quad \frac{\tau_0}{s} \neq \text{const}, \tag{7}$$

führt uns, indem wir das unzweifelhafte Beziehung $\tau = f(\tau_0)$ berücksichtigen, zu der plausibelsten Schlussfolgerung:

$$\tau_0 = \text{const}, \quad s \neq \text{const},$$

was bedeutet, dass im Medium eine Auslöschung erster Art stattfindet, während die Auslöschung zweiter Art fehlt.

Um von dem dargelegten Standpunkt aus die Vorgänge aufzuklären, die sich beim Erwärmen des in Isoamyl- oder Isobutylalkohol aufgelösten Rhodamins abspielen, muss man sich vorstellen, dass die Moleküle im Medium in drei Zuständen auftreten. Ein Teil der Moleküle verwandelt sich unter der Wirkung des Lösungsmittels in eine Verbindung, die kein Licht in der Anregungszone absorbiert (α nimmt ab). Der andere Teil der Moleküle ändert sein Absorptionspektrum nicht und wird nicht mehr angeregt, d. h. befindet sich im Zustande der Auslöschung erster Art; schliesslich, bleiben noch Moleküle, die normal angeregt werden und im angeregten Zustande keine Auslöschung (zweiter Art) erleiden. Um einen derartigen Zustand zu verwirklichen, ist es offenbar nötig, dass der chemische Vorgang sich rasch umkehren liesse, was auch bei Abkühlung des Mediums

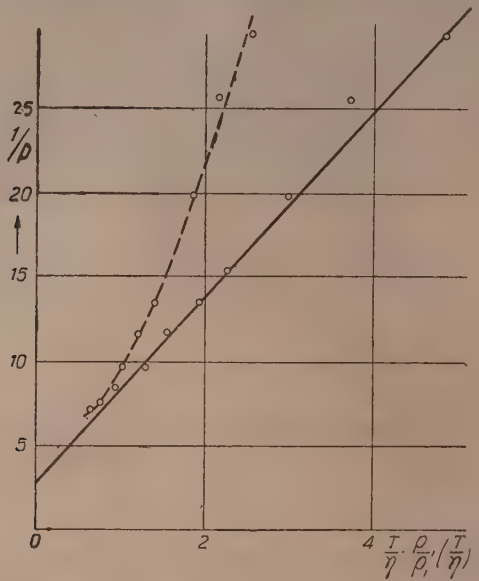

Fig. 3.

experimentell beobachtet worden ist. Eine gewisse Schwierigkeit für eine derartige Auslegung besteht darin, dass man eine zweifache Wirkung der Lösungsmittelmoleküle auf Rhodamin annehmen muss.

§ 4. Die in § 2 und 3 beschriebenen Versuche führen uns zu der Schlussfolgerung, dass die Erscheinungen der Auslöschung von Rhodamin B in Lösungen beim Erwärmen durch umkehrbare Wirkungen des Lösungsmittels auf die angeregten bzw. nicht angeregten Moleküle zu erklären sind. Ob angeregte oder nicht angeregte Moleküle dieser Wirkung ausgesetzt sind, hängt von dem verwendeten Lösungsmittel ab. Auch ist die Ausbeute der Rhodaminfluoreszenz für verschiedene Lösungsmittel verschieden. Ist dies nun darauf zurückzuführen, dass eine Auslöschung erster Art existiert, die von der Beschaffenheit des Lösungsmittels abhängig ist und sich beim Erwärmen nicht ändert, oder darauf, dass sich der Unterschied auf die Eigentümlichkeit der durch die verschiedene Lösungsmittel bewirkten Auslöschung zweiter Art beschränkt? Um diese Frage zu entscheiden, wurden

τ_1 und die relative Ausbeute ρ für Rhodamin in verschiedenen Lösungsmitteln bei Zimmertemperatur gemessen. Das Fluoreszenz- und Absorptions-Spektrum verschiebt sich in verschiedenen Lösungsmitteln, ohne seine Gestalt zu verändern. Die Verschiebungen erreichen als Maximalwert 10 mμ, sind also klein. τ_1 wurde auf Grund der Formel (5) aus den Veränderungen der Fluoreszenzpolarisation bei Auslöschung durch fremde Stoffe bestimmt. Aus den Versuchen selbst und aus all dem, was wir über die Auslöschung mittels fremder Stoffe wissen, folgt unzweifelhaft, dass bei einer solchen Auslöschung s und τ stets unverändert bleiben, wenn man das gegebene Lösungsmittel nicht durch ein anderes ersetzt. In Tabelle 4 sind die Ergebnisse der Messungen angeführt.

Tabelle 4

Lösungsmittel	Auslöschender Stoff	$\tau_1 \cdot 10^9$	$\rho_{rel.}$	$\frac{\rho}{\tau_1}$	$\rho_{abs.}$
Wasser	KJ	0.94	4.5	4.8	0.25
Methylalkohol	Anilin	1.48	7.7	5.2	0.39
Äthylalkohol	»	1.60	8.0	5.0	0.42
Glyzerin	»	2.70	14.5	5.1	0.70
Isobutylalkohol	»	3.30	10.5	3.2	0.51
Isoamylalkohol	»	3.80	11.0	3.0	0.53

In der vierten Spalte ist die Ausbeute in willkürlichen Einheiten angegeben. Wie aus der Tabelle ersichtlich, bleibt das Verhältnis $\frac{\rho}{\tau_1}$ bei den vier ersten Lösungsmitteln konstant, obgleich sich τ_1 und ρ stark verändern. Das lässt sich auf keine andere Weise erklären, als dass die Veränderung von τ_1 und ρ in verschiedenen Lösungsmitteln ein Ergebnis der spezifischen, durch diese Lösungsmittel bewirkten Auslöschung zweiter Art ist. Was aber die zwei letzten in der Tabelle angeführten Lösungsmittel betrifft, so bestätigen hier die von der Konstanz abweichenden Werte von $\frac{\rho}{\tau_1}$ vollständig unsere Schlussfolgerung. In diesen Alkoholen (§ 3) ist τ von der Auslöschung unabhängig und es findet eine Auslöschung erster Art statt. Da aber ρ bei Zimmertemperatur kleiner als Eins ist, so müssen Messungen bei niedrigeren Temperaturen ausgefürht werden, um für diese Lösungsmittel dasselbe Verhältnis $\frac{\rho}{\tau_1}$ zu erhalten.

Für Isobutyl- und Isoamylalkohol ist τ_1 praktisch von der Temperatur unabhängig, auch übt die Wellenlänge des anregenden Lichtes darauf keinen Einfluss aus, was durch andere Versuche bestätigt worden ist. Also darf man den Wert $3.8 \cdot 10^{-9}$ Sek. als von τ_0 sehr wenig verschiedenen betrachten. Auf Grund von (1) können wir die absolute Ausbeute (ρ_{abs} der letzten Spalte) berechnen, indem vir für die vier ersten Lösungsmittel s annäherend gleich 1 setzen (was bei Erregung durch Wellenlängen, die dem Maximum des Fluoreszenzspektrums nahe kommen, zulässig ist) und die Werte für τ_1 aus der dritten Spalte (Tabelle 4) nehmen. Durch auf diese Weise ermittelten Zahlen kann man auch ρ_{abs} für die zwei letzten Lösungen berechnen, man braucht nur die Werte der relativen Ausbeute zu benutzen.

§ 5. Die Auslöschung der angeregten Moleküle durch das Lösungsmittel, die für Rhodamin B untersucht und nachgewiesen wurde, ist kein Ein-

zelfall. Dieselbe Ursache wird wahrscheinlich auch die starke Veränderung der Fluoreszenzausbeute haben, welche beim Erwärmen der Platocyanid-Lösungen ([3]) eintritt. Die Auslöschung des dauernden Leuchtens, die beim Erwärmen der festen Rhodulin-Lösungen eintritt, konnten wir früher nur auf den Einfluss der benachbarten aufgelösten Moleküle zurückführen, jetzt aber auch auf die Wirkung des Lösungsmittels.

Die Wahrscheinlichkeit einer Auslöschung bei Zusammenstoss des angeregten Moleküls mit einem Molekül des Losungsmittels ist sehr gering. Das wird uns klar, wenn wir die Zahl der Zusammenstösse in der Flüssigkeit mit der Lebensdauer des angeregten Zustandes vergleichen. Zehntausende

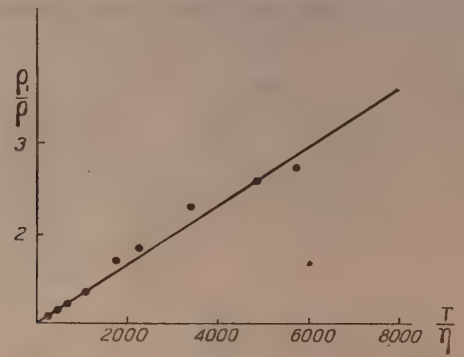

Fig. 4.

solcher Zusammenstösse fallen auf einen Auslöschungsvorgang. Welche Moleküle des Lösungsmittels nehmen an der Auslöschung teil? Einen Hinweis darauf gibt uns die Abhängigkeit der Auslöschung des Rhodamins B in Glyzerin von der Viskosität. Auf Grund der Angaben der Tabelle 1 sind in Fig. 4 die Werte für $\frac{\rho}{\rho_1}$ aufgetragen, als Funktion der mit der Temperatur multiplizierten Beweglichkeit $\frac{T}{\eta}$. Hier haben wir wieder eine lineare Abhängigkeit derselben Art, wie bei Auslöschung der Fluoreszenz durch fremde Stoffe ([5]). Deswegen kann man annhemen, das die Auslöschung beim Zusammenstoss mit aktiven (im physikalisch-chemischen Sinne) Molekülen stattfindet, deren aktiver Zustand lang genug dauert ($\sim 10^{-9}$ Sek.). Diese Annahme bedarf aber einer weiteren Untersuchung.

Optisches Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 31. VII. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] S. I. Wawilow, C. R. Acad. Sci URSS, III, 6 (1936). [2] W. L. Lewschin, Acta physico-chimica. URSS, 2, 21 (1935). [3] I. N. Khwostikow, Sow. Phys., 9, 210 (1936) [4] A. A. Schischlowski u. S. I. Wawilow, Sow. Phys., 5, 379 (1934). [5] Vgl, z. B., J. M. Frank u. S. I. Wawilow, ZS. f. Phys., 69,100 (1931).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

PHYSIQUE

L'ABSORPTION DES ONDES ULTRA-SONORES DANS L'ACIDE ACÉTIQUE

Par P. BAŽULIN

(Présenté par L. I. Mandelstam, de l'Académie, le 21. VII. 1936)

Une série de travaux ont montré que le coefficient d'absorption α des ondes ultra-sonores est dans un grand nombre de liquides proportionnel au carré de la fréquence υ (1). Ce résultat s'accorde avec la théorie hydrodynamique de l'absorption du son. L'écart entre les valeurs absolues du coefficient d'absorption que donne l'expérience et celles calculées d'après la pareille théorie montre cependant que cette dernière ne peut être, sous la forme générale, appliquée à l'interprétation du phénomène.

Les travaux de M. Leontowič (2) et de L. Mandelstam donnent certaines indications sur la façon dont on peut construire la théorie du phénomène. Il résulte de leurs considérations que la loi $\alpha \sim \upsilon^2$ ne peut valoir que si υ ne dépasse pas une certaine limite dépendant de la nature du liquide; υ croissant, la croissance de α doit se ralentir. Aux fréquences élevées le coefficient d'absorption doit tendre vers une valeur constante (indépendante de la fréquence).

Dès mes premiers expériences avec l'acide acétique j'ai pu constater que la loi $\alpha \sim \upsilon^2$ n'est pas valable dans l'intervalle $5 \cdot 10^6$—$10 \cdot 10^6$ H. (La même observation a été faite aussi par M. Biquard pour l'acétate de méthyle aux fréquences $4.7 \cdot 10^6$—$11.1 \cdot 10^6$ H.) Il est donc intéressant d'étudier l'allure de la fonction $\alpha = f(\upsilon)$ dans un grand intervalle de fréquence.

Cette note indique les résultas des mesures d'absorption ultra-sonore dans l'acide acétique faites à des fréquences variant entre $3.73 \cdot 10^6$ et $31.3 \cdot 10^6$ H. La méthode expérimentale était à quelques perfectionnements prés, celle que j'ai décrite dans ma note précédente (1).

Pour éviter les erreurs considérables que peut occasionner l'existence d'un fond lumineux, surtout lorsque la lumière diffractée est peu intense, je supprimais le faisceau central et un des spectres du 1-er ordre. Les erreurs dues à une petite divergence entre les directions des différents faisceaux, particulièrement dangereuses aux fréquences élevées (3), étaient exclues en faisant la moyenne des résultats que donnent les spectres d'ordre $+1$ et -1.

Pour éviter les flux de chaleur qui deviennent gênants aux fréquences élevées, le liquide était légèrement brassé.

Pour élever la précision des résultats j'ai fait un grand nombre de mesures. De plus pour une même image je déterminais α en employant plusieurs affaiblissements différents.

Le tableau 1 donne à titre d'exemple les résultats des mesures faites á la fréquence $\upsilon = 11.5 \cdot 10^6$ H pour quatre affaiblissements différents et pour les spectres d'ordre +1 et —1.

Tableau 1

La lumière est affaiblie dans le rapport	α	
	Spectre d'ordre +1	Spectre d'ordre —1
1 : 2.8	0.60	0.58
1 : 4.3	0.59	0.60
1 : 7.7	0.63	0.67
1 : 9.5	0.62	0.63
Valeur moyenne . .	0.61	0.62

L'écart maximum entre les différents résultats et leur moyenne est inférieur à 15%. Les plus grands écarts se rapportent aux fréquences comprises entre $28 \cdot 10^6$ H et $31.3 \cdot 10^6$ H. Pour les autres fréquences les écarts sont

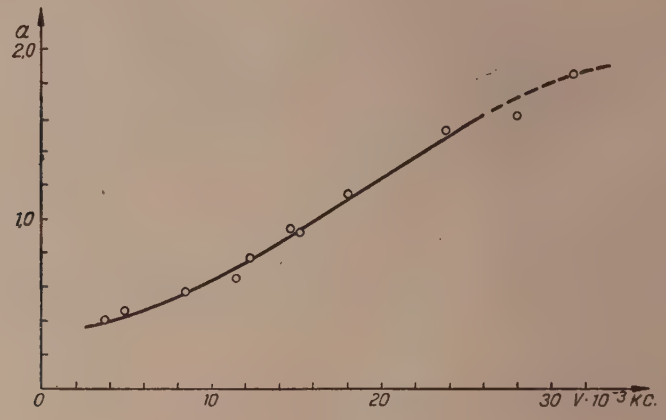

Fig. 1.

d'environ de 10%. Des tels écarts sont parfaitement admissibles pour la méthode de la photométrie photographique. La valeur du coefficient d'absorption α était obtenue comme la moyenne des résultats fournis par 5 à 25 images. On peut admettre que pour les valeurs de α qui figurent dans le tableau l'érreur moyenne (non systématique) ne dépasse pas 10%. Elle est encore moindre aux plus basses des fréquences étudiées.

Le tableau 2 donne les résultats des mesures.

Tableau 2

№	Fréquence en kH	t°C	α	$\frac{\alpha}{\nu} \cdot 10^{10}$	$\frac{\alpha}{\nu^2} \cdot 10^{17}$
1	3 730	17.5	0.40	1 072	2 875
2	4 990	17.5	0.46	922	1 847
3	8 300	18.1	0.57	687	827
4	11 520	17.5	0.65	564	490
5	12 360	23	0.77	623	504
6	14 690	19	0.94	640	436
7	15 230	21—22	0.92	604	397
8	18 080	21—22	1.15	636	352
9	23 800	20—25	1.52	639	268
10	28 000	18—28	1.60	571	204
11	31 300	21—28	1.85	591	189

La fig. 1 donne en abscisses les fréquences en kH et en ordonnées les valeurs mesurées de α. La fonction $\alpha = f(\upsilon)$ est, comme le montre la fig. 1, approximativement linéaire. L'extrémité pointillée de la courbe semble indiquer que cette fonction cesse d'être linéaire pour des fréquences $31 \cdot 10^6$H environ. Mais les mesures aux fréquences plus élevées faisant encore défaut, il reste des doutes quant à la réalité de ce dernier résultat. La courbe montre de plus qu'apparement la transition entre la loi $\alpha \sim \upsilon^2$ qui doit intervenir aux basses fréquences et la loi linéaire observée aux fréquences étudiées s'opère d'une façon assez compliquée. La même remarque s'applique probablement au méthyle d'acétat ([4]) également.

L'étude des variations de α en fonction de la température, ainsi que celle de l'absorption ultra-sonore des mélanges présente un intérêt théorique indépendant et sera l'objet d'une étude spéciale. Quelques observations faites à la fréquence $28 \cdot 10^6$H montrent que dans l'intervalle 18—28° C les variations de α ne dépassent pas l'erreur des mesures.

Tableau 3

№	t°C	α
1	18	1.60
2	20.5	1.65
3	22.2	1.55
4	28	1.63

Il est donc peu probable que l'influence des variations de température puisse affecter appréciablement l'allure de notre courbe (fig. 1).

L'influence que peut exercer la présence de petites quantités d'eau n'a pas été l'objet d'une étude spéciale, mais des mesures faites pour d'autres mélanges ont montré que de petites quantités d'un liquide étranger peuvent faire varier considérablement le coefficient d'absorption.

Nous avons étudié les mélanges de benzène et de toluène. Le coefficient d'absorption est dans le benzène à peu près 10 fois plus grand que dans le toluène; les autres constantes de ces deux corps (densité, viscosité, vitesse

du son) diffèrent très peu. Les mésures ont été faites à 18° et à la fréquence $11.47 \cdot 10^6$ H. Elles ont donné les résultats suivants:

Tableau 4

№	Composition du melange	α
1	Benzène pur	1.03
2	12% de toluène . .	0.53
3	25% » » . .	0.47
4	50% » » . .	0.24
5	toluène pur	0.10

La courbe de la fig. 2 (en abscisses: pourcentage de toluène) montre que l'absorption n'est pas additive. Les petites concentrations de toluène la font varier très sensiblement.

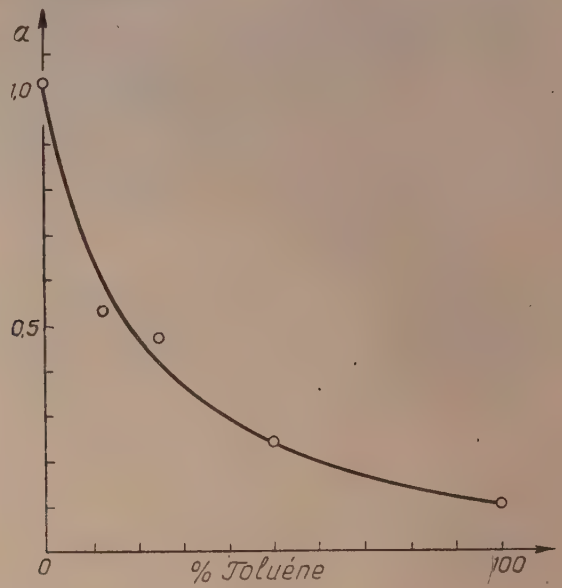

Fig. 2.

Je suis heureux de pouvoir exprimer une gratitude au prof. G. Landsberg et au prof. M. Leontovic pour leurs précieux conseils.

Institut de Physique.
Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 21. VII. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] P. Biquard, Thèse, Paris (1935); P. Bajulin, Phys. ZS. d. Sowjetunion, **8**, 354 (1935); J. Clayes, J. Errera et H. Sack, C. R., **202**, 1493 (1936); E. Baumgardt, C. R., **202**, 203 (1936). [2] М. Леонтович, Журн. теорет. и эксперим. физики (1936). [3] С. Рытов, Журн. теорет. и эксперим. физики, **5**, 843 (1935). [4] P. Biquard, Thèse, Paris (1935); J. Claeys, J. Errera et H. Sack, C. R., **202**, 1493 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

PHYSICS

NEW TYPE OF STEREO-COMPARATOR FOR WORK WITH WILSON'S CHAMBER

By L. GROŠEV, N. DOBROTIN and J. FRANK

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 7. VI. 1936)

In studying a number of questions by means of Wilson's chamber it is necessary to know the spatial distribution of particles observed in the chamber. It is customary for this purpose to obtain two photos, taken either by means of two separate cameras whose centre lines in the majority of cases form an angle of 90° or by means of one stereoscopic camera. In the first case, the protographs represent projection on two mutually perpendicular planes. The great advantage of such photos is that they readily admit of subsequent treatment. However, this method has one essential disadvantage, viz., the photographs made at an angle of 90° to each other do not give any clear idea of the spatial picture. The stereoscopic photos have no such disadvantage, a simple examination of these photos in a stereoscope reveals the entire spatial picture, which is in some cases a very important and occasionally even a decisive factor.

Different methods may be used to calculate the spatial distribution of the tracks of particles in Wilson's chamber from stereoscopic photos. One of these methods involves the use of the stereo-comparator (1) ordinarily used for geodetic purposes. In this case, the right angle coordinates of the individual points of the track are determined, the spatial position of the trajectories measured being found on the basis of these coordinates.

Another method of treating stereoscopic photographs was suggested by Nuttall and Williams (2). In this method, the photographs are placed in the same stereoscopic camera, with which they were obtained. Both photographs are illuminated from the side opposite to the object glass of the camera.

A system of needles possessing three degrees of freedom is placed approximately at the spot where was located the object photographed. The light rays from the respective points of the negative, after passing through the object glasses, cross each other at that point of the space where the corresponding point of the object photographed was formerely located. By examining the image thus restored with both eyes and making its individual points coincide with the needles, we can reconstruct the spatial picture of the object photographed. To determine the spatial angles, the system of needles may

be projected on the corresponding planes, the angles being calculated from the projections thus obtained.

In using this method as somewhat different procedure may be adopted, viz., a needle may be moved successively over the points of the track measured; in this case three coordinates are recorded for each point, all the calculations being made on the basis of theses coordinates.

We developed one more method of calculating the spatial distribution of the tracks of particles in the chamber from stereoscopic photographs. This method may be applied when the object photographed is placed at a short distance from the camera. It is particularly suitable for the work with Wilson's chamber. The essence of this method is as follows. A stereoscopic photograph of Wilsons' chamber is placed, the same as in the method of Nuttall and Williams, in the camera by means of which the photograph was obtained, the position of negatives and object glasses remaining the same as when the photograph was taken. A pointer which can be moved by means of screws in three mutually perpendicular directions is placed at approximately the same distance from the camera as was located the object photographed, three right angle coorginates being recorded from vernier readings for each position of the pointer with regard to some arbitrary initial point. The object glasses of the camera project the image of this pointer on the negative. In examining the negatives through an ordinary stereoscope, we can see simultaneously the spatial picture of the tracks in Wilson's chamber and the position of the pointer in space. By moving the pointer, we can easily make its point coincide with any point of the track measured.

Successive application of this method enables us to calculate the spatial position of the track; it should be noted that the movement of the pointer determined by vernier readings corresponds in its magnitude to the real dimensions of the track in Wilson's chamber, which ensures the great accuracy of the method suggested.

The method under discussion can be also adapted to the measurement of angles. For this purpose, the needle may be placed on a table of Fedorov type, used in crystallography, and its picture made to coincide with the image of the track of particle by means of rotating the two limbs. From the readings on these limbs the angle between the two tracks may easily be computed.

Other variations of this method are also possible.

Like the method of Nuttall and Williams, our method has a number of advantages over that of the ordinary stereo-comparator: the simplicity of the apparatus, the fact that the actual dimensions of the track are measured, the fact that the calculations require no knowledge of the constants of the instrument (basis, focal distances, and the position of the projection of the centre of one of the object glasses on the plane of the image). At the same time, it is more simple and convenient to treat the stereoscopic photographs by our method than by that of Nuttall and Williams.

Lebedev Physical Institue
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
7. VI. 1936.

REFERENCES

[1] D. Skobelzyn, ZS. f. Phys., **65**, 773 (1930). [2] Nuttall a. Williams, Proc. Phys. Soc., **42**, 212 (1930).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

PHYSICS

ON THE ABSORPTION OF NEUTRONS IN Ag, Cd and B. II

By N. DOBROTIN

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 28.VI.1936)

The present preliminary communication is a continuation of the preceding paper by the author on the absorption of neutrons ([1]).

As in the experiments previously described, the neutrons were obtained by the action of radium and radon γ-rays upon beryllium. As before, a silver

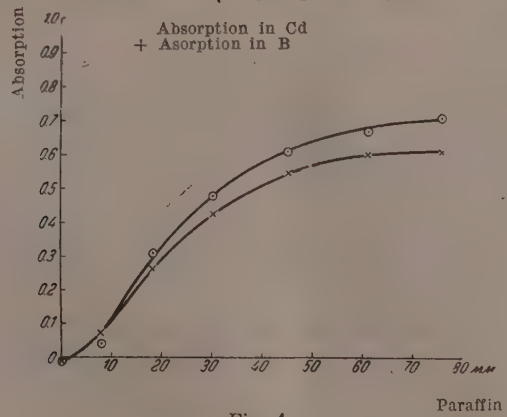

Fig. 1.

Geiger-Müller counter was used in whose walls the neutrons called forth an artificial radioactivity, which was subsequently measured. The exposure of the counter to the action of neutrons was continued for 10 minutes; the counter was switched on 42 seconds after the end of the exposure. The geometrical conditions of the experiments were the same as those of the previous experiments.

In the first series of experiments, we investigated the dependence of the absorption of neutrons by boron on the thickness of paraffin which slows down the neutrons. As an absorber, a layer of dielim ($B_{12}Al$), equivalent to the layer of boron of a thickness of ~ 0.1 g/cm^2, was used. In experiments without the absorber, boron was replaced by aluminiun foil of a thickness which corresponded to the quantity of Al in the dielim used.

The absorption curve obtained is shown in Fig. 1. Against the axis of ordinates is plotted absorption in terms of activity obtained without the absorber; against the axis of abscissae is plotted the thickness of the paraffin. For the sake of comparison, in Fig. 1 is shown the curve of the absorption of neutrons in Cd taken from the preceding paper of the author ([1]). A comparison of the two curves shows that the absorption varies in exactly the same manner. It follows that the region of velocities of neutrons absorbed by Cd is so close to the region of velocities of neutrons absorbed by boron (according to a number of data, boron mostly absorbs neutrons slowed down by paraffin), that the difference between these regions is not manifested when the thickness of the paraffin which slows down the neutrons is changed.

In the second series of experiments we investigated the absorption in Ag of neutrons filtered through Cd in relation to the thickness of the paraffin. The results obtained are shown in Fig. 2. In the same figure are shown the

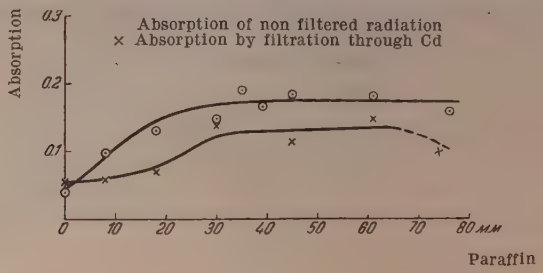

Fig. 2.

data on the absorption of an unfiltered beam of neutrons in Ag taken from the preceding paper of the author ([1]). A comparison of these two curves shows that filtration through Cd reduces the coefficient of absorption of neutrons in Ag. Kurčatov and Ščepkin ([2]), contrary to this, found that the filtration of neutrons through Cd increases the coefficient of absorption of neutrons in Ag. This divergence must be due to the fact that, in the experiments in question, the neutrons of group *A* (according to the designation of Fermi) could hardly have played an important part, since these neutrons were absorbed already by the surface layers of Ag, while the electrons resulting from artificial radioactivity called forth by these neutrons were absorbed by the walls of the counter itself (4.48 g/cm^2). In the experiments of Kurčatov and Ščepkin, the elimination of the neutrons of group *C* (absorbed by Cd) increased the relative quantity of the neutrons of group *A* and thus increased the coefficient of absorption. Additional experiments were made to check up the reality of a certain decrease in absorption in the case of great thicknesses of paraffin, this time a somewhat different geometrical arrangement, making it possible to work with still greater thicknesses of paraffin, being used. Although these experiments did in general confirm the existence of a decrease in absorption in the case of great thicknesses of paraffin, this question needs further investigation.

In the third series of experiments, we investigated the relation between the activities of both Ag isotopes in the case of different filters and different thicknesses of paraffin. In this series, also, the counter was exposed to the action of neutrons for 10 minutes; the counter was switched on 30 seconds after the exposure had finished and the curve of the disintegration of Ag was plotted. The curve obtained was resolved into two exponential

curves. The mean value of the half-period of disintegration of one of the isotopes was 24 seconds, of the other, 2.33 minutes.

In the table is given the ratio (in percentages) of the activity of Ag decreasing with a short period to the full activity of Ag in the interval from 42 seconds to 5 minutes 42 seconds after the end of the exposure.

Absorber \ Paraffin	No paraffin	30 mm of paraffin (plates)	76 mm of paraffin (plates)	26 mm of paraffin (in the shape of a cylinder)
No absorber	10.8	13.8	12.3	17.6
Cd $\left(0.16\,\frac{g}{cm^2}\right)$	—	30.4 27.2 36.7	30.7	—
C $\left(\sim 0.1\,\frac{g}{cm^2}\right)$	—	17.8 26.6 19.6	—	—
Ag $\left(0.5\,\frac{g}{cm^2}\right)$	—	20.8	—	—

The table shows that the ratio of the activities of both Ag isotopes depends very little on the thickness of the paraffin. From the fact that filtration through Cd increases the relative quantity of activity decreasing with a short period, it follows that the relative quantity of neutrons of group *C* (with regard to the total number of neutrons absorbed) is greater for the isotope of Ag whose activity drops with a greater period than for the other isotope. The fact that B changes the relation between the activities of both isotopes of Ag less than Cd shows that, though the quantities of the slowest neutrons in the total number of the neutrons absorbed are different for the two isotopes of Ag, this difference is less than for the region of absorption of Cd.

In conclusion I acknowledge my gratitude to Prof. D. V. Skobelzyn for the discussion of the results obtained.

Lebedev Physical Institute.
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
28. VI. 1936.

REFERENCES

[1] Dobrotin, C. R. Acad. Sci. URSS, II, 6 (1936). [2] Phys. ZS. d. UdSSR, 9, 102 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

GENETICS

MORPHOLOGY AND CYTOLOGY OF THE HYBRID OF *NICOTIANA PANICULATA×NICOTIANA LANGSDORFFII*

By L. A. DREMLJUG

(Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukrainian Academy, 21. VI. 1936)

The hybrids of *N. paniculata* × *N. Langsdorffii* and the parental species, *N. paniculata* L. ($2n = 24$) and *N. Langsdorffii* W. ($2n = 18$) were grown in 1925, simultaneously in Leningrad and in Khibiny (67°44′ north. lat. under an uninterrupted day of 24 hours).

In Leningrad, during the whole time that the investigation lasted, the hybrids were kept in a greenhouse at the average temperature of 20—25°C. In Khibiny they were grown at the Klin greenhouse, the average temperature being 12—16° C. The Leningrad hybrids were weak plants, growing slowly, and flowered by one to one and a half month later than their parents. The flowers soon dropped off. The non-viability of the pollen of the hybrids was 88. 2%. At the end of the vegetation period the plants were covered with tumours.

The same hybrids grown at Khibiny developed splendidly, staying but very little behind their parents as regards growth. They flowered abundantly, at the same time as the parents (July 4). The flowers were not shed. The non-viability of the pollen of the hybrids was 85.1%. No tumours whatever could be found on the plants at the close of the vegetation period.

According to their characters, the hybrids are of an intermediate type. At an early stage they form a rosette of 5—6 leaves. The leaves are sessile as in the staminate parent, *N. Langsdorffii*, W., though not wrinkled but smooth as in the pistillate parent, *N. paniculata* L. In the leaves following the rosette leaves the leaf tissue forms a very narrow strip along the petiole so as to give at first sight the impression that the leaves are petioled. The shape of the leaves and their pubescense are distinctly intermediate. The flowers are green-yellow slightly zygomorphous, tubular. In many flowers of the hybrid, the corolla lobes are recurved. The pollen of the hybrid is pale blue, coloured, which indicates the incomplete dominance of *N. Langsdorffii* W., whose pollen is of a deeper blue (the pollen of *N. paniculata* is white).

All measurments of the hybrid and of the parental species are given in the table.

Measurements of the hybrid of *N. paniculata*×*N. Langsdorffii* and of the parental species under the growth conditions of Leningrad and of Khibiny

Parental forms and hybrid	Flowers (corolla), length/width in mm		Beginning of flowering		Fertility of the pollen	
	Leningrad	Khibiny	Leningrad	Khibiny	Leningrad	Khibiny
N. paniculata L ♀ $2n = 24$	30/8	35/10	10/VI	2/VII	—	—
F_1-*N. paniculata* × *N. Langsdorffii* $2n = 21$	28/15	32/18	15/VIII	4/VII	11.8%	14.88%
N. Langsdorffii W ♂ $2n = 18$	22/13	25/16	15/VI	2/VII	—	—

Continued

Parental forms and hybrid	Height of plants in cm		Leaves, length/width in cm		Total number of leaves	
	Leningrad	Khibiny	Leningrad	Khibiny	Leningrad	Khibiny
N. paniculata L ♀ $2n = 24$	80—85	70—75	7.5/4.5—9/7	10/8—12/10	20—25	25—30
F_1-*N. paniculata* × *N. Langsdorffii* $2n = 21$	40—45	55—30	6.5/4—10/7	9/6—14.5/9	12—14	13—15
N. Langsdorffii W ♂ $2n = 18$	70—85	60—70	10/7—15/9	15/8—25/9.5	13—15	22—25

Christoff (1) gave $2n = 16$ for *N. Langsdorffii*. The author of the present investigation found $2n = 18$. In the first meiotic metaphase there were counted 9 bivalents in all cells. In the hybrid of *N. paniculata* × *N. Langsdorffii* $2n = 21$. (Fig. 1)

Having cytologically studied the hybrid, Christoff (1) noted the complete absence of bivalents from the early prophase up to the second division. In the present investigation, the study of the meiosis in the hybrid was begun from the late stage of diakinesis. The most frequent associations in this stage were bipartits and tripartits; polypartits were rarer (Fig. 2). Most frequently chromosomes were found like those in *a*, *h*, *i*, *j*. All of them were very loosely united, having evidently one terminal chiasma.

In the late first metaphase or, more exactly, in the early first anaphase the bipartits and tripartits were concentrated in the equatorial zone while the univalents lay in disorder near the poles.

Drawn out polypartits (Fig. 3) were to be observed in the first anaphase, between two anaphasic groups consisting of a different number of chromosomes.

Division of univalents in the first anaphase could be observed in 16% of the investigated cells.

In the second metaphase the single metaphasic plates showed a different number of chromosomes. The most frequent distributions were 10—11. Cells have been observed where in both metaphasic plates the total number of chromosomes was over 21, which confirmed the presence of division of the univalent in the first anaphase. In the second metaphase cells were

Fig. 1. Hybrid of *N. paniculata* × *N. Langsdorffii*. Somatic plate—21 chromosomes. 3400 times enlarged.

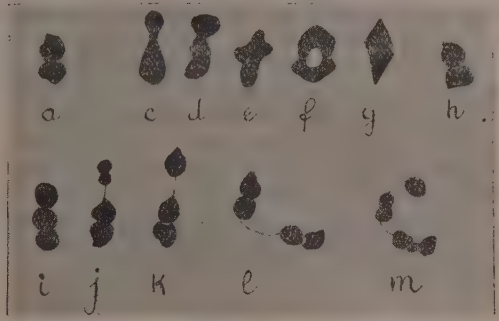

Fig. 2. Hybrid. Figures of chromosomes in diakinesis: *a*—*h* bipartits; *i*—*m* tripartits and polypartits. 3400 times enlarged.

found with one metaphasic plate containing all 21 chromosomes together. This is evidently the result of the omission of the first reduction division, which is quite consistant with the presence in the given investigation of dyads side by side with tetrads.

In the second anaphase there also could be observed groups with an unequal number of chromosomes. Such an arrangement of the chromosomes is responsible for the formation of cells of different size in the microsporocytes.

In the microsporocytes studied there have been found pentads, tetrads, friads and dyads.

The diameter of the fertile pollen grains of the hybrid, having formed from dyads ($2n = 21$), is 42.1 microns, which coincides with the data of Kostoff ([4]) that, in Nicotiana, the pollen grains with a greater number of chromosomes have a greater diameter.

The hydbrid of *N. paniculata* × *N. Langsdorffii* has been described by all authors ([1], [2], [4], [7]) as being represented by weak, slowly growing, dwarfish plants.

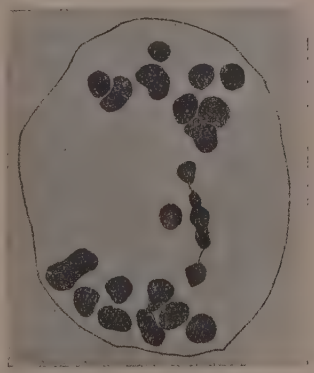

Fig. 3. Anaphase 1. 3400 times enlarged.

The present investigation has made perfectly clear that, apart from internal genotypical causes, the manifestation of the phenotype of the hybrid and its general constitution are greatly influenced by external environmental conditions. Thus, in dependence on environmental conditions we have in Leningrad weak, slowly growing hybrids, while in Khibiny the same hybrids do well, staying but little behind their parents. As we have mentioned already, the hybrids, as regards their characters, are of an intermediate type.

The above-described disturbances observed in the meiosis of the hybrid were the same under the conditions of Khibiny and of Leningrad.

While Christoff regards the complete absence of bivalents as a peculiarity of the hybrid of *N. paniculata* × *N. Langsdorffii*; the present investigation has revealed that, both in diakinesis and in the first anaphase, a small amount of loosely united bipartits, tripartits and polypartits are present. As it is well known that under normal conditions the parental species of *N. paniculata* and *N. Langsdorffii* show no trivalents and polyvalents in diakinesis and first metaphase, the presence of tripartits and polypartits in the hybrid of *N. paniculata*×*N. Langsdorffii* may be explained by the structural hybridity of the parents (8).

The author expresses her deep gratitude to Prof. D. Kostoff for kindly placing at her disposal the hybrids of his collection and for his valuable advice in several phases of the work.

Laboratory of Plant Genetics.
University of Leningrad.

Received
21. VI. 1936.

REFERENCES

[1] M. Christoff, Genetics, **13** (1928). [2] E. M. East, Bibliographia Genetica, Deel IV (1928). [3] E. M. East, Genetics, **20** (1935). [4] D. Kostoff, Genetics, **12** (1930). [5] D. Kostoff, Current Science, II (1934). [6] D. Kostoff, C. R. Acad. Sci. URSS, I, № 5 (1935). [7] R. H. Lock, Ann. Roy. Bot. Gard. Perad, 4 (1909). [8] A. Müntzing, Hereditas, **20** (1933).

Comptes Rendus (Doklady de l'Académie des Sciences de l'URSS
1933. Volume III (XII), № 6 (101)

GENETICS

A NEW DUPLICATION IN THE X-CHROMOSOME OF *DROSOPHILA MELANOGASTER* AND ITS EVOLUTIONARY SIGNIFICANCE

By K. V. KOSSIKOV

(Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukrainian Academy, 31. VII. 1936)

While studying the chromosomes of the salivary glands of *Drosophila melanogaster*, in several cases, Bridges (1) noted morphologically similar sections in the same chromosome, and explained them as duplications which became fixed during the process of evolution. Independently of this, C. A. Offermann (7) studied and described in detail a duplication in the *X*-chromosome, forming the so-called «bulb». The present article deals with the study of a newly discovered duplication, also localized in the *X*-chromosome, in the region of the gene «wavy».

The Localization of the Duplication

While studiyng the chromosomes of the salivary glands of *D. melanogaster*, we noted that in the regions of the chromosome designated as «11—12» (in

Fig. 1.

Fig. 2.

accordance with the scheme of chromosomes of the salivary glands drawn up by Bridges), a fold is occasionally formed which resembles a loop. Upon a more detailed study, it was possible to determine that in the region of the «week spot», directly to the right of the latter, disc 11 *A* (the last double band) and 11*B* (first double band) conjugate with disc 12*D* (double) and 12*E* (first double); the discs lying between the above mentioned conjugating discs, however, do not always conjugate with those lying opposite them in the loop. (The corresponding section is shown in Fig. 1 and 2, which repre-

sents a typical preparation that was observed. The discs are here designated in accordance with the scheme of Bridges.) But in some cases such a conjugation does occur even though the sections of the chromosomes lying opposite each other are morphologically somewhat different. It was possible to observe this complete apposition of the above named sections of the chromosome in a separated chromosome of a female which accidently had not conjugated with its homologue.

The genetic data of Muller and Painter ([4]) which established the lowered frequency of mutation in the region of the genes «miniature-garnet» in comparison with the frequency of crossing over in this same region, are in full accordance with our data and can very easily be expleained by the presence of a duplication at this place.

The Possible Mode of Origin of the Duplication

Offerman ([7]) suggested two possible schemes of formation of the symmetrical duplication which he described in the «bulb»: 1) a duplication may arise by the formation of loops (duplication—inversion) as a result of three breaks and two reattachments, and 2) it may arise in a chromosome which is about to, or has already, split off into sister threads as the result of a breaking of two threads in three places, or, if they have already divided, of three threads in five places, and the subsequent uniting of the resulting pieces of the divided threads at three points. We wish to present a third possible scheme, by which a symmetrical duplication might arise in two steps. The first stap would be the formation of an ordinary inversion which, as shown in the works of Sturtevent ([8],[9]) and Dubinin, Sokolov and Tinyakov (at press), are constantly present in natural populations, where their number reach about 38 per cent. In this case the chromosome always has the possibility of forming a duplication, if conjugation occurs in an individual heterozygous for an inversion, followed by exchange between two homologous loci lying at the extremity of the inversion. We believe that this type of conjugation should be quite possible, especially in short inversions.

Conjugation Observed in the Symmetrical Duplication and Its Explanation from the Evolutionary Point of View

As noted by Offerman ([7]) there are two major possibilities of conjugation for symmetrical duplications: either two arms of the duplication of the same chromosome conjugate and then a «two-sided duplicated branching»* of the type frequently observed in the bulb is formed, or else the duplicated chromosomes conjugate with each other, without the appearance of branching. Theoretically, both types of conjugation might also occur at once in some cases, giving a single «branch». It may be assumed that in a longer symmetrical duplication (*e. g.*, our duplication, as compared with the bulb) the tendency to a «two-sided duplicated branching (in females) should not decrease. However, in this case, in the several hundred prepatarions which we examined, we did not find one case of the formation of a «two-sided duplicated branching». We always observed conjugated homologous chromosomes which, bending at the place of duplication, conjugated with each other, for-

* We wish to call the branching occurring during the conjugation of duplications «duplicated branching», in contrast to the more general term «branching», since the latter suggests the attachment of a piece of chromosome to the side. As we showed in our study of the translocation «Pale», such side attachments probably do not exist ([2]).

ming a «one-sided duplicated branching». This can be explained in the following manner.

The genes located in the duplication, as was pointed out by Muller ([3]) are more susceptible to change then these not lying within the duplication, since one half of the genes present in this case are not necessary for the life of the individual. These changes are apparently accompanied by morphological changes of the corresponding sections of the chromosome (including perhaps small deletions and rearrangements, as well as mere changes in the morphological expression of the genes) and since it is quite improbable that the changes in both duplicated arms occured in the same direction, it is natural to assume that the original complete homology of the duplicated sections gradually dissappears, untill they finally become quite non-homologous. In this way, during the conjugation of the changed duplicated sections of the chromosome, the attraction between the quite homologous regions of the duplications in the two chromosomes surpasses the attraction between the now only partly homologous arms of the duplication in the same chro-

Fig. 3.

mosome. Therefore, the frequency of formation of duplicated branching decreases. In our case it was met with very seldom, and when found, it was present in only one branch. This was because, even if a «two-sided duplicated branching» is primarily formed, nevertheless, owing to the stronger attraction of the identical sections of homologous chromosomes, in comparison with the interattraction between the arms of the duplication in the same chromosome, such a structure changed into a «one-sided duplicated branching». Proceeding from this one can conceive of the fate of symmetrically located duplications in the process of evolution. Duplications just formed, and fixed by selection, will give primarily «two-sided duplicated branching». Later, due to a weakening of the homology of the duplicated sections, a general decrease in the frequency of the formation of branched structures occurs; these structures then become one-sided and, finally, upon the full disappearance of the homology of the doubled sections, the branching should dissappear completely and duplication sould cease to exist as such (see scheme in Fig. 3).

In correspondence with these three main stages in the history of duplications, the frequency of the observed recessive mutations in the duplicated region had also to be changed. This frequency must differ from that in other regions of the chromosome [noticed by Muller([4]) in 1932 for the *m-g*-region; the explanation of this peculiarity follows from the present paper], and the qualitative character of the mutation process in this region probably is also different.

Offermann ([7]) discovered exactly the same structure, the bulb, in the *X*-chromosome of *D. simulans* (which he interpreted here too as symmetrical duplication) as he described in *D. melanogaster*. We also have discovered the here described duplication in exactly the same location in the *X*-chromosome of *D. simulans* as in *D. melanogaster*. This points to the remoteness of formation of the duplication formed by us and in accordance with our scheme, since this duplicated structure did not give a «two-sided branching

structure», we believe it to have arisen earlier than the duplication in the bulb, which does give this structure.

Fully in agreement with the statements of Bridges [1] and of Muller [5,6], who both undependently suggested the role of duplications in evolution, in providing a means of increase in the number of genes, we wish to emphasize the universal character of this phenomenon for the evolution of species, and this method of increasing the number of genes in the organisms is probably the most widespread, if not the only one. In full accordance with this is the generally known fact, that individuals possessing duplications are relatively more viable than individuals carrying deletions, the latter being in many cases lethal to the individual. However, the cases sometimes met with, although rarely, of individuals homozygous for small deletions being viable, point in all probability to the presence of a duplication of that section of the chromosome.

Institute of Genetics.
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
31. VII. 1936.

REFERENCES

[1] C. B. Bridges, J. Hered., **26**, 60—67 (1935). [2] K. V. Kossikov a H. J. Muller, J. Hered., **26**, 305—317 (1935). [3] H. J. Muller, Genetics, **3**, 422—499 (1918). [4] H. J. Muller a. T. S. Painter, ZS. f. ind. Abst. u Vererb., **62**, 316—365 (1932). [5] H. J. Muller, Genetics, **17**, 237—252 (1935). [6] H. J. Muller, J. Hered., **26**, 469—478, (1935). [7] C. A. Offermann, J. Gen , **32**, 103—116 (1936). [8] A. H. Sturtevant, Biol. Zbl., **46**, 697—702 (1926). [9] A. H. Sturtevant, Carn. Inst. Wash. Publ., **421**, 1—27 (1931-a).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

PLANT PHYSIOLOGY

SHORT PERIODICAL ILLUMINATIONS AS A METHOD OF CONTROLLING THE DEVELOPMENT OF PLANT ORGANISMS

By V. M. KATUNSKIJ

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 15. V. 1936)

In our previous paper (1) we have shown that short illuminations produce considerable formative and growth effect when they are repeated at definite intervals, specific for each plant.

The present work was undertaken for the purpose of finding out whether it is possible to use short periodical illuminations as a method of controlling the length of the vegatative period of plant growth.

Phaseolus and peas, which, under the conditions of our experiment, behaved as long-day plants, were chosen for this investigation. The experiment were carried out in luminostats illuminated by gas-filled electric glow lamps. The intensity of illumination was 5000 luxes.

The experiments in all cases included in their scheme the following variants: (a) continuous illumination, (b) «long-day»—18 h. 30 m. of light + 5h. 30 m. of darkness, (c) «short-day»—13 h. of light + 11 h. of darkness, and finally last two (principal) variants: (d) «long-day»—18 h. of light + 6 h. of darkness and e) «short-day»—12 h. of light + 12 h. of darkness.

In the last two variants the plant received 5 minutes of light every «dark» hour. It is thus evident from the above scheme that the variants (d) and (e) receive the same amount of light and darkness as the corresponding variants (b) and (c). The short periodic illumination of the variants (d) and (e) was effected by means of a clockwork and an intermediate relay.

The intensity of the short «nocturnal» illuminations was 5000 luxes. The experimental plants were cultivated in pots and each experiment was repeated three times. The following figures (number of days from seeding till flowering) are the results of three experiments out of a total of eleven. ZGP = Zolotaya Gora phaseolus; MWP = Moscow white phaseolus; BP = Bismark pea.

	ZGP	MWP	BP
Continuous day	35	34	44
Long-day (18 h. 30 m)	41	39	52
Long-day (18 h.) and night with short periodical illuminations	37	35	47
Short-day (13 h.)	56	42	60
Short-day (12 h.) and night with short periodical illuminations	39	37	48

The above table shows that short periodical illuminations during the dark portion of the 24 hours considerably hasten the flowering of long-day (under the given light regime) plants. This hastening is especially considerable under the conditions of a short-day, when, as the above table shows, the plants left the controls 5, 12 and 17 days behind. Having obtained formative effects from short illuminations of a light intensity of 5000 luxes, we made experiments where the intensity was much lower, viz., of the order of hundreds of luxes (150—300). These experiments also produced quite definite effects, slighter, however, than in the first case. So, for example, the same subjects which had formerly show a hastening in flowering of 5, 12 and 17 days, now showed a hastening in flowering of 3, 7 and 12 days respectively.

After that, a series of experiments was carried out to determine the significance of the length of the period of short illuminations, *i. e.*, of the duration of the intervals of time between two consecutive illuminations. The method of these experiments consisted in subjecting, during the night, all the variants, receiving an equal 9-hour day, to short periodical illuminations totalling 30 minutes of light of an intensity of 4500 luxes, all the difference between them being that the length of the short periodical illuminations and that of the intervals between them were different in each variant. The variants were as follow:

a) illumination for 15 min. every 7 h. 30 min., in all 30 min.
b) » » 5 » » 5 » 00 » » » » »
c) » » 3 » » 3 » 00 » » » » »

The following table summarizes the results of these experiments for three subjects:

	ZGP	MWP	BP
Control 9 hour day	62	54	68
7 hours 30 min.	57	52	60
5 » 00 »	53	52	60
3 » 00 »	41	42	51

The above data show that the effectiveness of short periodical illuminations in respect of hastening the flowering depends, to a condsiderable extent, on the length of their periods. It is interesting to note that these data are quite similar to those obtained by us earlier with regard to the effect of short periodical illuminations on the dynamics of the growth hormone content, and on the growth of oats coleoptiles, the seedlings of beans, castor-oil plant and other plants. This justifies us in presuming that the effect of short periodical illuminations on flowering is associated with their influence on the content (or activity) of the growth promoting hormone.

The above stated results of our work allow us to regard short periodical illuminations as a new and effective factor in controlling the development of plant organisms.

All Union Institute for the Electrification of Agriculture.
Electro-Biological Laboratory.

Received
15. V. 1936.

REFERENCES

[1] V. M. Katunsky, C. R. Acad. Sci. URRS II, № 6 и 7 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume III (XII), № 6 (101)

ZOOLOGY

ON THE ANABIOSIS OF FISHES IN SUPERCOOLED WATER

By P. J. SCHMIDT, Corresponding Member of the Academy, G. P. PLATONOV and S. A. PERSON

The experiments of N. A. Borodin (2) and N. I. Kalabukhov (1) have shown that it is rather difficult to produce anabiosis in fishes by freezing them. Freezing of fishes in water is almost never successful, for, as soon as ice forms round the fish, the latter perishes, neither supercooling nor a jump in temperature occuring in the body of the fish; its temperature shows a continuous decrease. If the fish be taken out at a body temperature of —0.2—0.3° C, it may sometimes revive, but it always dies if its body temperature falls to —0.4—0.°8. On freezing very small crucian carps (body length 21 mm) in dry air, Kalabukhov rarely succeeded in producing a supercooling to —4.°8 with a jump in temperature, after which the fish revived only when supercooling continued for a very short time (5—10 minutes). As a rule, the fishes did not revive if their body temperature fall below —0.°85 and attained, for example, —2.°05. In Borodin's experiments fishes revived only when their body temperature did not fall below —0.4—0.6°, and only in one case did *Fundulus* revive after a body temperature of —1.°0.

In 1935/1936 at the initiative of the Chair of Refrigerating Engineering of the Leningrad Institute of Refrigerating Industry and in their laboratory we undertook an investigation of the anabiosis of fishes on their being frozen. We commenced with a series of experiments designed to check the data of earlier investigators, and our experiments fully confirmed these data. Our methods of cooling fishes and determining temperatures had certain advantages over those of earlier authors. We will describe these methods later in a completer work.

Our experiments on mirror carps and crucians 250—400 grams in weight showed them to revive after being frozen in dry air for 1—2 hours at a temperature of —10° only on condition that the body temperature at a depth of 1.5—2.5 cm from the surface, measured by means of inserted needle-shaped thermocouple, does not fall below—0.72—0.°92. If the body temperature falls below —1.°0, the fish always dies. If the temperature of the surface layer itself be measured by subcutaneous insertion of the needle, it will be found that the fish stands lower temperatures in this layer, *e. g.* down to —1.°88 and even to —3.°33 (common carps). On freezing, the consistency of the body must always remain soft for the fish to revive, freezing to a solid state is absolutely fatal.

The question interested us whether the death of the fish is due exclusively to the conversion of its body juices into a solid state, as it might be

supposed, or whether low temperature by itself has a fatal effect on living matter. To decide this question, we made the first experiments of keeping fishes in s u p e r c o o l e d w a t e r.

The task of obtaining a quantity of highly supercooled water sufficient to keep even a small fish was found to be far from easy, and our first experiments were a failure. We then designed the apparatus represented in Fig. 1. The fish (bleak or stickleback) was placed in a glass tube, 3.5 cm in diameter, stopped from below by a cork with a thermo-needle passed through it. This

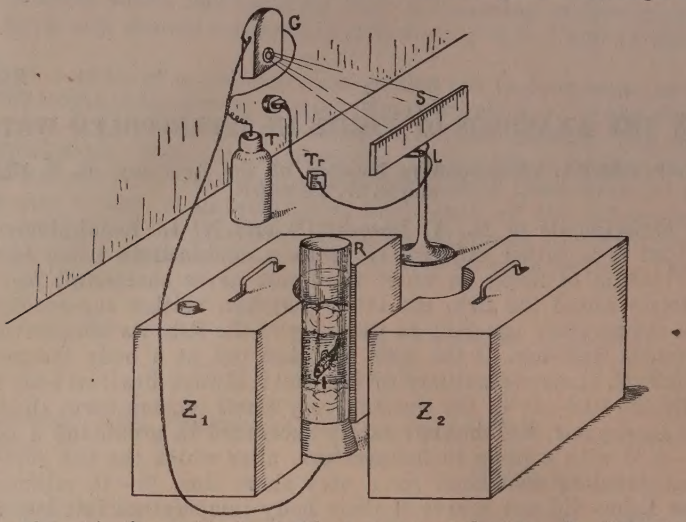

Fig. 1. Experiment in the anabiosis of fish in supercooled water. *R*—Glass tube with a cork and thermocouple; Z_1Z_2—Iron vessels with cryohydrate solution; *T*—Thermos-flask with ice; *G*—Galvanometer; *Tr*—Transformer for a small lamp *L*; *S*—Scale.

tube was fixed on a stand in a vertical position and cooled by two iron vessels with groovelike depressions, which enclosed the tube without touching it. The vessels were charged with corresponding cryohydrates frozen in a refrigerator. In these expirements the following cryohydrate solutions were used by us: KCl with a temperature of —11.°1, $MgSO_4$ with —3.°9, and KNO_3 with —2.°9. The leads from the thermocoulpe ran to a second thermocouple placed in a thermos-flask with melting ice and to a reflecting galvanometer made by the workshop of the Physical Institute of the Leningrad State University. The fish was placed in the lower part of the tube filled with tap water, just over the needle. To decrease vertical circulation in the water, a cotton wool wad was placed in the tube above and below the fish. A layer of oil was poured on to the surface of the water to inhibit the formation of ice crystals. The two iron vessels were then moved together and covered with a piece of felt. The results of these experiments (barring tentative and doubtful ones) are given in the table.

As the curves in Fig. 2 show, the cooling of the water under such conditions proceeded gradually, not too rapidly. It took 40—60 minutes for the temperature of the water to fall to zero, and then there followed a similar gradual supercooling of the water down to —2.°0, and in one case even down to —3.°06. Between —2 and —3° (and sometimes a little earlier) the equilibrium became unstable, and in a number of tests a jump was observed with

Results of the experiments

No of experiment	Date	Fish	Weighting	$t°$ of cryohydrate	Duration of supercooling below 0° in min	Duration of supercooling below —1° in min.	Minimum $t°$ of supercooling	Jump of $t°$	Fish
20	27/III	A	—	—11°.1	40	25	—2°.2	0	Revived
23	13/IV	P	—	— 3°.9	75	65	—3°.06	0	»
26	26/IV	P	—	— 2°.9	185	135	—2°.13	0	»
27	27/IV	P	0.84	— 2°.9	170	125	—2°.05	0	»
15	26/III	A	—	—11°.1	18	15	—1°.7	+	»
16	26/III	A	—	—11°.1	20	15	—2°.55	+	»
21	28/IV	A	0.375	— 3°.9	82	62	—2°.72	+	»
25	17/IV	P	—	—11°.1	30	16	—2°.3	+	»
13	23/III	A	0.55	—11°.1	35	25	—2°.7	+	Perished
18	27/III	A	0.45	— 3°.9	76	61	—2°.2	+	»
19	27/III	A	0.42	—11°.1	55	50	—2°.1	+	»
22	28/III	L	—	—11°.1	51	45	—2°.9	+	»
28	28/III	P	0.425	— 2°.9	150	120	—2°.15	+	»
29	29/IV	P	0.285	— 3°.9	57	10	—1°.62	+	»

Explanation: A—*Alburnus alburnus* L.; P—*Pungitius pungitius* L; L—*Leuciscus idus* L.; 0—no temperature jump; + temperature jump present

a subsequent rapid freezing of the water (curve *A*), but in other cases we succeeded in keeping the fish more then one hour at a temperature of —2.°13 (curve *C*).

The bleak or stickleback, which at first swam briskly around the needle, became motionless on reaching 0°, its respiratory movements stopped,

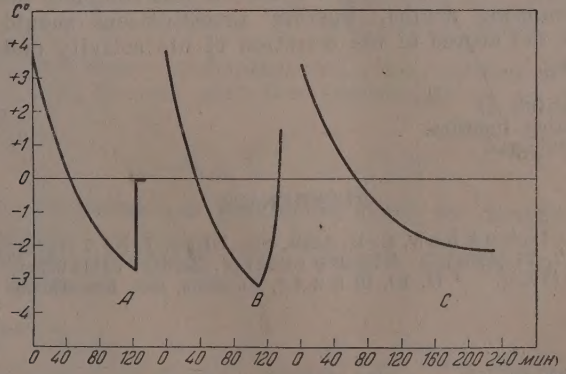

Fig. 2. Refrigeration curves of the fishes. *A*—curve of experiment No 21. *B*—curve of experiment No 23. *C*—curve of experiment No 26. On the axis of abscissae is plotted time in minutes.

and it looked dead. Considering the small size of the fish and its long exposure to low temperatures, its body temperature could hardly differ much from the temperature recorded by the thermo-needle. Owing to the small size of the fish, it was impossible to measure its body directly; however, we made some control experiments. The thermo-needle was introduced in the body

of the dead fish and the rate of the cooling process was observed. It was found that the rate of cooling did not differ from that obsevred when the needle measured the temperature of the water alone. It may be therefore concluded that the temperature of the fish body shows no great difference from that of the surrounding water.

If no jump occured, the iron vessels were after 1—2 hours moved apart and the water in the tube quickly warmed (curve *B*). At + 0.°4 the fish already begins to make respiratory movements, at + 0.°8 it begins to move, and on being thansferred into water of room temperature behaves quite normally. But if a jump did occur, the vessels were immediately moved apart, and in this case in certain tests the fishes remained alive, notwithstanding the fact that they were surrounded by needles of ice crystals. In other cases, the fishes died when a jump occured, although the temperature might be even above —2.°0. Apparently, this depended on how far we had succeeded in saving the fish from the crystallization of the supercooled juices of its body.

We are the first to have succeeded, in these experiments, in supercooling for a prolonged period of time the juices in the body of fishes to a temperature more than 2° below their normal freezing temperature, which is —0.5, 0.°6. These experiments have also shown that fish can stand such supercooling even down to —3.°06, provided no cristallization of the surrounding water and its body juices occurs. It has thus been proved that fishes perish mainly from the effect of the ice forming within its body and not from the effect of low temperature.

Such powers of resisting supercooling are undoubtedly of certain biological significance for fishes, as under natural conditions there also occur cases of supercooling of water, both in stagnant waters and in rivers.

At the same time, we have here a real anabiosis of fishes, if we take this term in its modern sense (3) [Schmidt (3), p. 257], as «the phenomenon of the depression of life by the elimination of water from living matter by desiccation or freezing, when there occurs a more or less complete cessation of life processes resembling death». Further investigations should be devoted to a study of the degree of the cessation of life activity under conditions of supercooling.

Institute of
Refrigerating Industry.
Leningrad

Received
10. VI. 1936.

REFERENCES

[1] N. A. Kalabukhov, C. R. Acad. Sci. URSS, I, No 7 (1934); Рыбное хозяйство СССР, № 2, 24 (1934). [2] N. Borodin, Zoolog. Jahrbücher, Abt. Zoologie, **53**, 1, 313—342 (1934). [3] П. Ю. Шмидт, Анабиоз, изд. Биомедгиза (1935).

ERRATUM

Dans la note «Les laves de volcans des environs de Merghen» par A. N. Zavarickij— vol. I, № 9, p. 369, 4-ème ligne—an a à substituer 1720—1722 à la place de 1770—1772.